

MCMC法を用いたFSRQ型活動銀河核ジェットの
多波長放射スペクトルの再現

広島大学理学部物理科学科
高エネルギー宇宙・可視赤外線天文学研究室

B142692

平出尚義

指導教員: 深沢泰司 教授

主査: 深沢泰司 教授

副査: 三好隆博 助教

2018年2月28日 最終版提出

概要

銀河中心に太陽質量の $10^6 \sim 10^9$ 倍の大質量ブラックホールを持ち、電波領域からガンマ線領域まで明るく輝く天体を活動銀河核 (AGN) と呼ぶ。AGN の中にはジェットを放射しているものもあり、ジェットの進行方向が地球方向を向きかつ降着円盤が明るく輝いている AGN を FSRQ と呼ぶ。FSRQ は遠くの天体まで見るとともに、降着円盤も見えているので、大質量ブラックホールの進化をジェットと降着円盤に関して調べることができる。また、FSRQ を観測することでそのエネルギースペクトル分布 (SED) から、ドップラー因子や磁場などのジェットの物理パラメータを推定することができる。従来は FSRQ の放射の理論式は複雑かつパラメータの多さから計算量が多く、SED のフィットが困難であったため、いくつかのパラメータを固定して、目で見て合わせるという主観的な推定を行っていた。しかし、その方法だと最適解がどうか分からないということや、解の不定性を議論できないという問題があり客観性を欠いていた。そこで複雑な放射の理論式に対して様々な近似法を用いて計算の高速化をコンパイラ型言語であり実行速度の早い C++ で記述し、マルコフ連鎖モンテカルロ法 (MCMC 法) と呼ばれる各パラメータを乱数を用いて動かしながら、最適なモデルパラメータを推定する手法を用いて不定性を含めたジェットの物理パラメータを推定する。

目次

第 1 章	序論	5
1.1	活動銀河核	5
1.1.1	セイファート銀河	6
1.1.2	キューサー	7
1.1.3	電波銀河	7
1.2	ブレイザー	8
1.2.1	ブレイザーの分類	8
1.2.2	放射モデル	8
1.3	先行研究	10
1.4	本研究の目的	10
第 2 章	SSC(Synchrotron Self-Compton)	12
2.1	放射の理論式	12
2.1.1	シンクロトロン放射成分	12
2.1.2	逆コンプトン散乱成分	14
2.2	コードの書き直しによる計算速度向上について	15
2.2.1	インタプリタ方式とコンパイラ方式	15
2.2.2	結果	16
第 3 章	EC(External Compton)	18
3.1	放射の理論式	18
3.1.1	Head-on-Approximation	18
3.1.2	散乱された光子の平均エネルギーについて	20
3.1.3	一般的な種光子領域のデルタ関数近似	21
3.1.4	デルタ関数を用いた逆コンプトン散乱の理論式	22
3.2	各部分からの放射成分の理論式	23
3.2.1	降着円盤放射の逆コンプトン散乱	23
3.2.2	BLR とダストトーラスの種光子密度	25
3.2.3	BLR 放射の逆コンプトン散乱	26
3.2.4	ダストトーラス放射の逆コンプトン散乱	28
3.3	近似の妥当性	30
3.4	δ 関数近似による SSC 計算式の高速度化	31

第 4 章	MCMC 法とその解析結果	35
4.1	ベイズ統計	35
4.2	MCMC 法のアルゴリズム	35
4.2.1	メトロポリス法	35
4.2.2	適応的メトロポリス法	37
4.3	人工データの MCMC フィッティング	37
4.3.1	EC モデルに対して、ドップラー因子 δ_D 、タイムスケール T 、ローレンツ因子 r_1 、 r_2 に事前分布を置いた場合の SED パラメータ推定	42
4.3.2	逆コンプトン散乱成分を降着円盤からの放射のみにした場合の SED パラメータ推定	44
4.3.3	電子のノーマリゼーション K に事前分布を置いた場合のパラメータ推定	48
第 5 章	考察	51
5.1	精度と積分間隔の関係	51
5.2	FSRQ の放射モデルの収束について	52
5.3	OpenMP による計算速度高速化について	53
第 6 章	まとめと今後	54

目 次

1.1	AGN の模式図。 [2]	5
1.2	AGN の統一モデル。 [1]	6
1.3	セイファート銀河と通常銀河のスペクトル。(上):1 型の NGC4151。(中):2 型の NGC4941。 (下):通常銀河の NGC3366 [4]	7
1.4	SSC の放射イメージ図。	9
1.5	SSC で放射している BL Lac 天体である Mrk421 の SED。 [4]	9
1.6	FSRQ の放射イメージ図。	9
1.7	代表的な FSRQ である 3c279 の SED。 [6]	9
1.8	SSC モデルでフィッティングした Mrk421 の SED。 [7]	10
2.1	折れ曲がりのある冪乗分布による電子のエネルギー分布	13
2.2	SSC の SED。黒線がシンクロトロン放射成分、青色が逆コンプトン散乱成分を示している。 17	17
3.1	Head-on-Approximation のイメージ図。赤色:光子、青色:電子 [12]	19
3.2	$S_0(x)$ のプロット。(Finke+16) 点線は $x \gg 1, x \ll 1$ における漸近線を示す。 [12]	20
3.3	自分が作った C++ の $S_0(x)$ のプロット。	20
3.4	$S_1(x)$ のプロット。(Finke+16) 点線は $x \gg 1, x \ll 1$ における漸近線を示す [12]。	21
3.5	自分が作った C++ の $S_1(x)$ のプロット。	21
3.6	$S_2(x)$ のプロット。(Finke+16) [12] 点線は $x \gg 1, x \ll 1$ における漸近線を示す。	22
3.7	自分が作った C++ の $S_2(x)$ のプロット。	22
3.8	降着円盤放射逆コンプトン散乱の SED。(Finke+16) [12] 赤色の点線が本研究で用いた降着 円盤のモデルである。ブラックホールからジェットのプロープまでの距離 r を変化させてプ ロットした。	24
3.9	自分で作った降着円盤放射逆コンプトン散乱の SED。ブラックホールからジェットのプロープ までの距離 r を変化させてプロットした。	25
3.10	プロープの電子によって逆コンプトン散乱されている種光子の再放射の位置関係の図 [12] .	25
3.11	BLR による逆コンプトン散乱の SED。(Finke+16) [12] 黒線が本研究で用いた BLR のモデ ルである。ブラックホールからジェットのプロープまでの距離 r を変化させてプロットした。 27	27
3.12	自分で作った降着円盤放射逆コンプトン散乱の SED。典型的な r の値でプロットしている。 27	27
3.13	ダストトラスによる観測される逆コンプトン散乱の SED。(Finke+16)) [12] 黒線が本研究 で用いたダストトラスのモデルである。ブラックホールからジェットのプロープまでの距 離 r を変化させてプロットした。	29

3.14	自分で作ったダストトラスによる観測される逆コンプトン散乱の SED。典型的な r の値でプロットしている。	29
3.15	正確な逆コンプトン散乱と δ 関数近似を用いた逆コンプトン散乱 (Finke+16) [12]	31
3.16	$M_0(x)$ のプロット。点線は $x \gg 1, x \ll 1$ における漸近線を示す。(Finke+16) [12]	32
3.17	自分が作った C++ の $M_0(x)$ のプロット。	32
3.18	$M_1(x)$ のプロット。(Finke+16) [12] 点線は $x \gg 1, x \ll 1$ における漸近線を示す。	33
3.19	自分が作った C++ の $M_1(x)$ のプロット。	33
3.20	$M_2(x)$ のプロット。(Finke+16) [12] 点線は $x \gg 1, x \ll 1$ における漸近線を示す。	34
3.21	自分が作った C++ の $M_2(x)$ のプロット。	34
4.1	パラメータのトレース図。横軸:ステップ数、縦軸:パラメータ値。図より、パラメータ値がある程度の不定性を持たせて収束している。	36
4.2	事後分布。横軸:パラメータ、縦軸:事後確率を示す。	36
4.3	実験に用いる SED の人工データ。青点が真値、赤点がノイズを加えた後のデータ。	38
4.4	ドップラー因子 δ_D とタイムスケール T に事前分布を置いたときのトレース図。横軸はステップ数、縦軸はパラメータの値である。	39
4.5	事後分布。横軸:パラメータ値、縦軸:事後確率。	40
4.6	実験に用いる SED の人工データ。赤点がノイズを加えた後のデータ。点線が MCMC 法で推定したパラメータで作成した SED。	41
4.7	実験に用いる EC の人工データ。青点が真値、赤点がノイズを加えた後のデータ。	43
4.8	ドップラー因子 δ_D とタイムスケール T に事前分布を置いたときの EC モデルのトレース図。横軸はステップ数、縦軸はパラメータの値である。	44
4.9	実験に用いる SED の人工データ。青点が真値、赤点がノイズを加えた後のデータを示す。	45
4.10	ドップラー因子 δ_D と磁場 B 、 K_{Disk} に事前分布を置いたときの EC モデルのトレース図。横軸はステップ数、縦軸はパラメータの値である。	46
4.11	ドップラー因子 δ_D と磁場 B 、 K_{Disk} に事前分布を置いた場合の各パラメータの事後分布。横軸:パラメータ値、縦軸:事後確率である。	46
4.12	実験に用いる SED の人工データ。赤点がノイズを加えた後のデータ。点線が MCMC 法で推定したパラメータで作成した SED。	47
4.13	ドップラー因子 δ_D と磁場 B 、 K_{Disk} 、 K に事前分布を置いたときの EC モデルのトレース図。横軸はステップ数、縦軸はパラメータの値である。	48
4.14	ドップラー因子 δ_D と磁場 B 、 K_{Disk} 、 K に事前分布を置いた場合の各パラメータの事後分布。横軸:パラメータ値、縦軸:事後確率である。	49
4.15	実験に用いる SED の人工データ。赤点がノイズを加えた後のデータ。点線が MCMC 法で推定したパラメータで作成した SED。	49
5.1	積分の短冊の幅を変えて SSC 逆コンプトン散乱成分を計算した図。	51
5.2	図 5.1 の拡大図。なお、(0.050[s]) と (0.134[s])、(0.619[s]) の 3 点を省略している。	52

第1章 序論

1.1 活動銀河核

数多くある銀河のうち、中心部の非常に狭い領域から銀河全体を凌駕するような強い電磁波を放射しているものがある。このような銀河中心部領域を活動銀河核 (Active Galactic Nuclei; AGN) といい、活動銀河核を持つ銀河を活動銀河という。活動銀河核の中には電波からガンマ線までの広い波長域に及ぶ電磁波を放射するジェットを伴うものがある。活動銀河核の莫大なエネルギー源は核の中心にあるとされる $10^6 \sim 10^9$ 太陽質量の巨大質量ブラックホールである。このブラックホールに周囲の物質が降着して降着円盤を作り、重力エネルギーが解放されるとともに円盤の軸方向にジェットが発生する。ジェットとは細く絞られたプラズマのアウトフローのことであり、数百光年にも渡るジェットを伴っているものが確認されている。 [1]



図 1.1: AGN の模式図。 [2]

AGN は観測によって、いくつかの種族に分類することができる。その特徴の違いとして、以下がある。

1. 時間変動のタイムスケール.
2. スペクトルの輝線の線幅.
3. AGN までの距離.
4. 電波領域での明るさ.
5. 中心核から放射されるエネルギーの強度.

これらの特徴の違いにより、セイファート (Seyfert) 銀河、クェーサー (Quasar)、電波銀河 (Radio Galaxy)、ブレーザー (Blazar) のように系統的に分類することができる。また、現在では上記のように分類された AGN

は、ひとつの AGN を違う角度から観測したものであると考えられており、この考えを AGN の統一モデルといい、その概略図を図 1.2 に示す。このモデルの理由のひとつとして挙げられるのがダストトーラスの存在である。ダストトーラスとは AGN の中心にあるブラックホールを取り巻くように存在するガスやダストでできた領域のことである。周りから降着してきたガスは大きな角運動量を持つため、円盤状に分布するが、中心核からの強い放射の影響で中抜けの構造となり、このような形態をしているものと考えられる。このダストトーラスに対する視線方向の違いで様々な種類の AGN に分かれるのだらうと解釈されている。[1] 以下、各種類の AGN の特徴を簡単に記述する。尚、ブレイザーについては本研究の対象であるので、1.2 節で詳しく説明する。

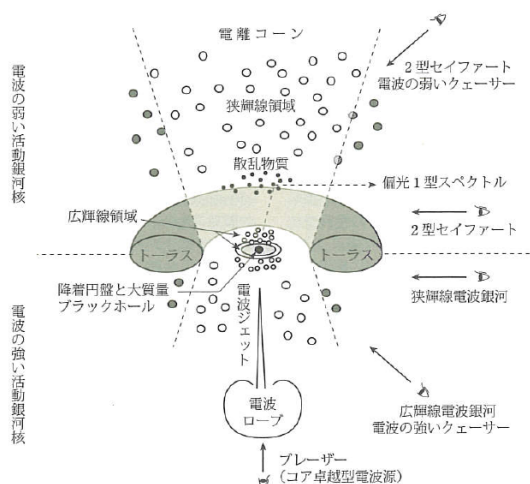


図 1.2: AGN の統一モデル。 [1]

1.1.1 セイファート銀河

セイファート銀河は、中心核の可視光域での光度が $M_B > -21.5 + 5 \log h_0$ (h_0 はハッブル定数を $100 [km/s/Mpc]$ の単位で表したものを) を満たす、電波放射の弱い AGN であり、1943 年に Carl Seyfert によって発見された。母銀河は主に渦巻き銀河である。セイファート銀河は可視光スペクトルによって大きく 2 つのサブクラスに分類される。

- 1 型: 幅の広い輝線 (数 $1000 \sim 10000 [km/s]$) と幅の狭い輝線 (数 $100 [km/s]$) のスペクトルを持つ。
- 2 型: 幅の狭い輝線のスペクトルのみを持つ。

上記の違いが現れる原因として最も有力な説が見ている放射領域の違いであると考えられている。幅の広い輝線は、中心核から近く $\leq 1 [pc]$ にある広輝線領域 (Broad Line Region: BLR) から放出されていると考えられている。この広輝線は許容線のみ見られる。スペクトルの幅が広がる原因として、BLR 中で放射

物質が運動していることによるドップラー効果により、光の波長が変化するためである。BLR に存在するガスは中心 BH からの強い紫外線や X 線によって光電離を起こし輝線を放射している。一方、幅の狭い輝線は、中心核から $10 \sim 100[pc]$ にある狭輝線領域 (Narrow Line Region:NLR) から放射されていると考えられる。NLR のガス雲は極めて密度が薄いため、原子同士の衝突が稀にしか起こらず、許容線だけでなく禁制線も生じる。 [3]

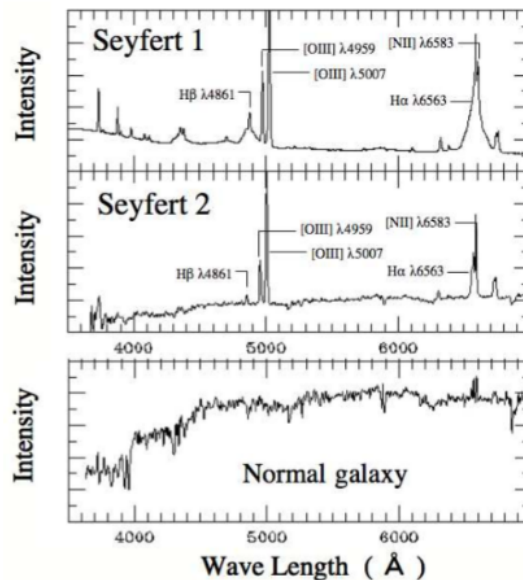


図 1.3: セイファート銀河と通常銀河のスペクトル。(上): 1 型の NGC4151。(中): 2 型の NGC4941。(下): 通常銀河の NGC3366 [4]

1.1.2 クェーサー

クェーサーは AGN の中で最も明るいクラスに属し、中心核の可視等級は $M_B < -21.5 + 5 \log h_0$ である。もともとは恒星のように見える天体 (quasi stellar object: QSO) という意味の英語から作られた造語であり、準恒星状天体と訳される。電波強度の大小に関わらず、可視で明るい活動銀河核はすべてクェーサーと呼ばれる。クェーサーのスペクトルには各種元素の輝線が見られ、求められる赤方偏移の値は非常に大きな値を示すため、遠方に数多く存在していると考えられている。また、クェーサーは大まかに 2 種類に大別でき、電波領域の光度が大きい radio-loud-quasar と電波領域の光度が小さい radio-quiet-quasar がある。 [1]

1.1.3 電波銀河

クェーサーよりも光度が低い AGN のうち、電波領域での放射が大きい (天の川銀河が出す電波強度の $10^4 \sim 10^9$ 倍) AGN であり、母銀河は楕円形のものが多い。電波の放射源は AGN またはそこから発生するジェット中にある非熱的な電子のシンクロトロン放射である。観測される可視輝線の幅によって広輝線電波

銀河 (broad-line radio galaxy:BLRG) と狭輝線電波領域 (narrow-line radio galaxy:NLRG) に分類される。これは 1 型と 2 型セイファート銀河の電波版ともいえる。 [1]

1.2 ブレーザー

電波～ガンマ線領域までの幅広い放射、電波～可視領域での強い偏光、数時間～数日での短時間変動を特徴とする AGN をブレーザーと呼ぶ。この正体はジェットをほぼ真正面から観測した AGN である。光速近くまで加速されたジェットのビーム内では電波から X 線領域に渡るシンクロトロンが放射され、ガンマ線領域では、ジェット中の光子または他の外来光子を逆コンプトン散乱したのが見えていると考えられる。シンクロトロン放射とは、光速近くで運動する電子が磁場中で曲げられることにより放出される電磁波のことであり、逆コンプトン散乱とは運動する電子が元々低エネルギーだった光子を散乱してエネルギーを与え、もとより高いエネルギーの光子が生成される過程のことである。ブレーザーの各周波数に対する放射エネルギーの分布であるエネルギースペクトル分布 (Spectral Energy Distribution;SED) を調べることで、ジェットの放射領域のドップラー因子や磁場、電子のエネルギー分布などのパラメータの物理量を推定することができる。本研究ではこのブレーザーを取り扱う。 [1]

1.2.1 ブレーザーの分類

ブレーザーはスペクトル観測によりとがげ座 BL 型天体 (BL Lac 天体) と Flat Spectral Radio Quasar (FSRQ) の 2 種類に分けられる。以下の表 1.1 にそれぞれの特徴を記す。次節でそれぞれのブレーザーの放射モデルである SSC と EC について詳しく述べる。

	降着円盤の明るさ	距離	放射モデル
BL Lac	暗い	近傍に多い	SSC
FSRQ	明るい	遠方に多い	SSC+EC

表 1.1: BL Lac 天体と FSRQ の特徴。

1.2.2 放射モデル

1. Synchrotron Self Compton(SSC) モデル

Synchrotron Self Compton(SSC) モデルとは、ジェット中の相対論的な速度になった電子がシンクロトロン光子を出すと同時に同領域のシンクロトロン光子を逆コンプトン散乱し、エネルギーを叩き上げる放射モデルであり、種光子はジェットからのみである。SSC モデルの SED を図 1.5 に示す。横軸が $\nu[Hz](\text{logscale})$ 、縦軸がエネルギー $\nu F_{\nu}[erg/cm^2/s](\text{logscale})$ である。

2. External Compton(EC) モデル

External Compton(EC) モデルとは種光子がジェットの外部である降着円盤、BLR、ダストトラスでも放出され、その種光子をジェット中の電子が逆コンプトン散乱する放射モデルである。図 1.7 に代表的な FSRQ の SED を示す。ピンク色の線が SSC のシンクロトロン放射成分、緑色の点線が SSC

の逆コンプトン散乱成分、灰色の点線とオレンジ色の点線と黒色の点線がそれぞれ降着円盤、BLR、ダストトラスからの外部光子による逆コンプトン散乱成分である。最後に、4つの逆コンプトン散乱成分を足しあわせたものが青色のグラフである。

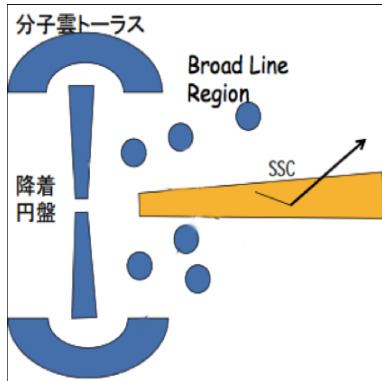


図 1.4: SSC の放射イメージ図。

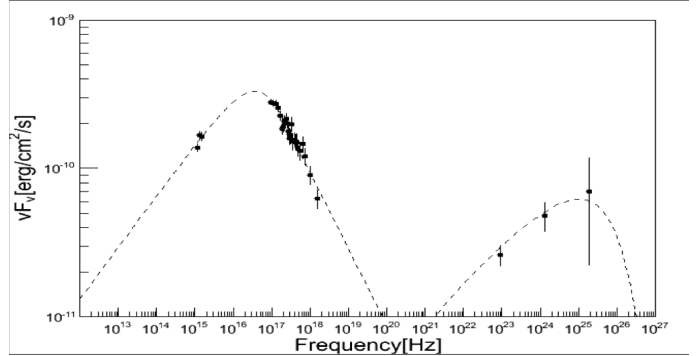


図 1.5: SSC で放射している BL Lac 天体である Mrk421 の SED。 [4]

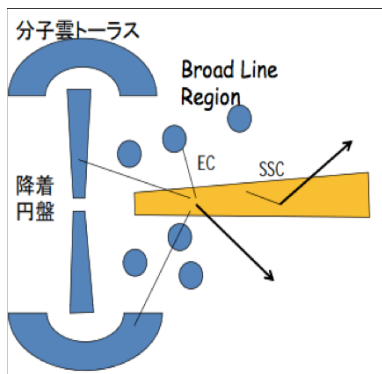


図 1.6: FSRQ の放射イメージ図。

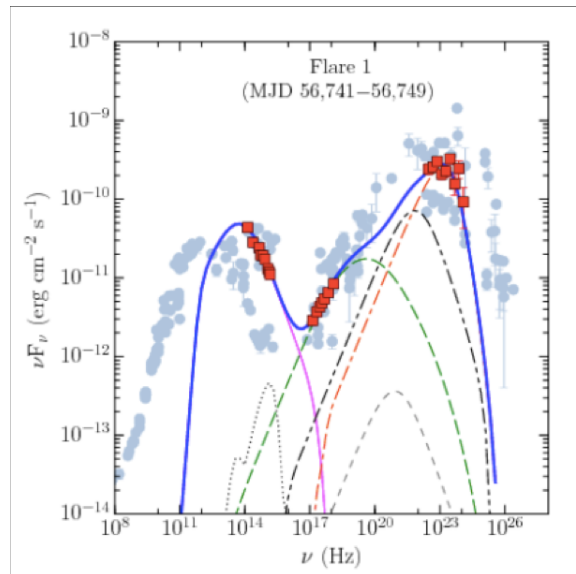


図 1.7: 代表的な FSRQ である 3c279 の SED。 [6]

ここでは SSC、EC の放射の概論を述べた。詳しい理論式については第 2 章、第 3 章を参照して欲しい。

1.3 先行研究

従来のブレイザー天体の SED モデルパラメータは、シンクロトロン放射と逆コンプトン散乱の制約がある一方で、ドップラー因子や磁場、変動のタイムスケールなどといったパラメータに光度が強く依存するため、これらの値のいくつかは独立して決めることが出来ない。そこで、Itoh, et. al. (2015) [7] では BL Lac である Mrk421 の 2009~2011 年における観測データに SSC モデルを当てはめることで物理量を推定している。つまり、観測によってある程度予測可能であるパラメータを固定して、他のパラメータを推定するという方法がとられていた。(図 1.8) また、Böttcher, et. al. (2013) [8] は SSC モデルを観測データから直接目

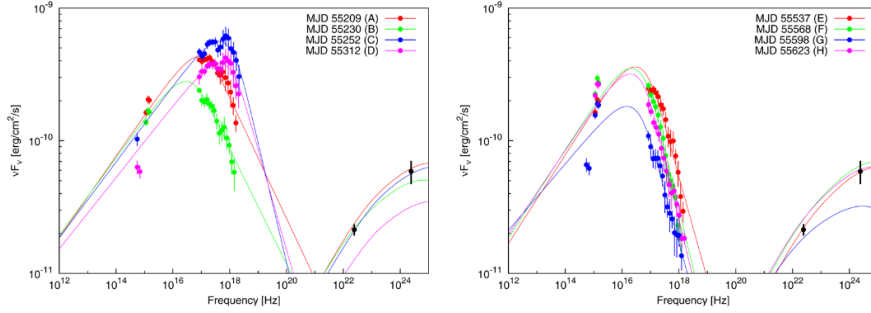


図 1.8: SSC モデルでフィッティングした Mrk421 の SED。 [7]

で fit するという方法 (fit-by-eyes) を用いていた。しかし、これらの手法では固定された値の正当性や不定性について考慮されておらず、推定の客観性に問題があった。そこで、山田卒論 (2016) [5] では Mrk421 に対してマルコフ連鎖モンテカルロ法 (mcmc 法) という多変量の確立分布からモデルの最適化を行う統計手法を適用し、ジェットのパラメータの不定性を含めて議論することに初めて成功した。ここでは観測から予測可能なジェットのドップラー因子 δ_D 、タイムスケール T に事前分布を仮定することで、7~9 個あるパラメータの縮退が解け、推定が可能になることを示している。

1.4 本研究の目的

本研究の目的は、FSRQ 型活動銀河核 (FSRQ) のジェットからの放射領域の物理量をマルコフ連鎖モンテカルロ法 (MCMC 法) という多変量の確立分布からサンプルを得るための統計的手法を用いて推定し、より正しい SED を再現してジェットの正しい物理描像を得るということと、FSRQ は遠くの日体まで見えているとともに降着円盤も見えているので、巨大質量ブラックホールの進化をジェットと降着円盤に関して調べることができるということである。FSRQ は BL Lac よりも高エネルギー側 (ガンマ線領域) が明るく、ガンマ線観測衛星でデータが取りやすいということと、今現在の受かっている天体数が、全天ブレイザーカタログである The Roma BZcat-5th edition において FSRQ では 1909 天体であり、BL Lac の 1425 天体に比べて数が多いという観測的利点がある。従来の方法では SSC, EC 共に複数のパラメータが存在し、これらは独立には決まりにくく、EC の放射の理論式は複雑でかつその計算量の多さから、観測によって得られるデータ点から SED を目で fit し、予測できるパラメータは固定して使うという手法が取られてきた。しかし、値を固定する方法ではそれが本当に最適解かどうかや不定性の推論の問題が生じ、推定の客観性を欠い

てしまうという現状であった。そこで先行研究として山田卒論 (2016) で BL Lac の放射モデルである SSC に対して MCMC 法を用いて 7~9 個あるモデルパラメータの値を不定性を含んで推定し、これまでおおよその値でしか分かっていなかったブレイザー天体の放射領域の物理量を初めてより正確に推定を可能にした。本研究ではこの MCMC 法を用いたモデルパラメータの推論手法を FSRQ の放射モデル (SSC+EC) にも適用し、降着円盤、BLR、ダストトラスからの外部光子からの逆コンプトン散乱のフリーパラメータを含んだジェットの物理描像を議論する。そのために、FSRQ の放射モデルの数値計算コードを作成した。また、MCMC はそのアルゴリズムの構造上、パラメータを変えながら何度も計算しなければならないため、一回あたりの計算速度を高速化する必要がある。従って、FSRQ の放射の理論式をコンパイラ型言語であり処理が早いとされる C++ でコーディングし、できるだけ高速計算を目指す。これにより今後様々な天体で MCMC を適用する際に効率化が可能となる。

第2章 SSC(Synchrotron Self-Compton)

2.1 放射の理論式

FSRQ 型活動銀河核の放射モデルは SSC モデル+EC モデルであるので、まずは SSC モデルの理論式について説明する。SSC モデルとは前節でも説明した通り、ジェット中の相対論的な速度になった電子がシンクロトロン放射を出すとともに同領域のシンクロトロン光子を逆コンプトン散乱し、エネルギーを叩き上げる放射モデルである。以下の理論式は Finke,et.al.(2008) に基づいている。 [9]

2.1.1 シンクロトロン放射成分

シンクロトロン放射成分の定式化について説明する。このモデルは観測者から見てビーミング因子 δ_D で移動しておりシンクロトロン放射をしている球を考えている。以下ではジェットの静止系での値には「'」を用いて表記する。

電子の質量 m_e 、電子の電荷 e 、光速 c 、プランク定数 h 、放射領域の磁場 B 、電子ローレンツ因子 γ と置き、観測者の系において光子の無次元量放射エネルギーを $\epsilon = \frac{h\nu}{m_e c^2}$ とする。

上記を用いて、

$$x = \frac{4\pi\epsilon' m_e^2 c^3}{3eBh} \quad (2.1)$$

とし、この x の関数として、

$$R(x) = \frac{x}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin\theta \int_{x/\sin\theta}^{\infty} dt K_{5/3}(t) \quad (2.2)$$

を定義する。ここで、 $K_{5/3}$ は第二種特殊ベッセル関数である。この関数 $R(x)$ は $10^{-2} < x < 10^1$ の範囲においては以下のように近似することができる。

$$\log(R) = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 + A_4 y^4 + A_5 y^5 \quad (2.3)$$

ここで、 $y = \log(x)$ であり、各係数の値を表 2.1 に示す。上記の範囲以外では、Crusius と Schlickeiser(1986) によって以下のように近似することができる [10]。

$$R(x) = \begin{cases} 1.80842x^{1/3} & (x \ll 1) \\ \frac{\pi}{2} e^{-x} \left(1 - \frac{99}{162x}\right) & (x \gg 1) \end{cases}$$

このとき、非一様の磁場中の等方的な電子のシンクロトロン放射率は、 [23]

$$\epsilon' J'_{syn}(\epsilon') = \frac{\sqrt{3}\epsilon' e^3 B}{h} \int_1^{\infty} d\gamma' N'_e(\gamma') R(x) \quad (2.4)$$

係数	$10^{-2} < x < 10^0$	$10^0 < x < 10^1$
A_0	-0.35775237	-0.35842494
A_1	-0.83695385	-0.79652041
A_2	-1.1449608	-1.6113032
A_3	-0.68137283	0.26055213
A_4	-0.22754737	-1.6979017
A_5	-0.031967334	0.032955035

表 2.1: $R(x)$ の近似式における各係数の値。

であり、観測されるシンクロトロン放射のフラックスは

$$f_\epsilon^{syn} = \frac{\delta_D^4 \epsilon' J'_{syn}(\epsilon')}{4\pi d_L^2} = \frac{\sqrt{3} \delta_D^4 \epsilon' e^3 B}{4\pi h d_L^2} \int_1^\infty d\gamma' N_e'(\gamma') R(x) \quad (2.5)$$

と書ける。ここで、 d_L は光度距離といい、距離を天体の放つ光の明るさの減光具合によって定義する。赤方偏移を z 、ハッブル定数を H_0 、ダークエネルギー密度パラメータを Ω_Λ 、全物質密度パラメータを Ω_m とすると、宇宙定数を持つ一般の平坦な宇宙では、

$$d_L = \frac{1+z}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}} \quad (2.6)$$

と書ける。 $N_e(\gamma)$ はローレンツ因子 γ における電子数密度を表し、本研究の場合では broken-power-law 分布という折れ曲がりのある冪乗分布を考える。 K_e を電子標準因子、 p_0 、 p_1 を電子スペクトル因子、 γ_b をカットオフローレンツ因子とすると

$$N_e(\gamma) = K_e \begin{cases} \left(\frac{\gamma}{\gamma_b}\right)^{-p_0} & (\gamma < \gamma_b) \\ \left(\frac{\gamma}{\gamma_b}\right)^{-p_1} & (\gamma > \gamma_b) \end{cases}$$

と示され、図 2.1 のような分布となる。

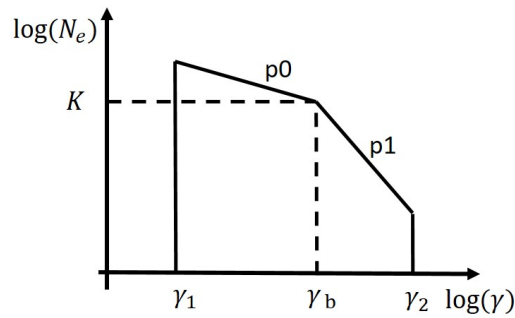


図 2.1: 折れ曲がりのある冪乗分布による電子のエネルギー分布

2.1.2 逆コンプトン散乱成分

次に逆コンプトン散乱成分を考える。シンクロトロン光子数密度、放射エネルギー密度を考慮し、(2.5)式のシンクロトロン放射フラックスを考えると、等方的かつ均一な光子・電子分布に対する逆コンプトン散乱放射率は、体積全体によって積分され、

$$\epsilon' J'_{SSC}(\epsilon'_s) = \frac{9\sigma_T d_L^2 \epsilon_s'^2}{4\delta_D^4 R_b'^2} \int_0^\infty d\epsilon' \frac{f_\epsilon^{syn}}{\epsilon'^3} \int_{\gamma'_{min}}^{\gamma'_{max}} d\gamma' \frac{N'_e(\gamma')}{\gamma'^2} F_C(q, \Gamma_e) \quad (2.7)$$

となる。ここで観測される逆コンプトン散乱成分のフラックスは、

$$f_{\epsilon_s}^{SSC} = \frac{\delta_D^4 \epsilon'_s J'_{SSC}(\epsilon'_s)}{4\pi d_L^2} = \frac{9}{16} \frac{(1+z)^2 \sigma_T \epsilon_s'^2}{\pi \delta_D^2 c^2 t_{v,min}^2} \int_0^\infty d\epsilon' \frac{f_\epsilon^{syn}}{\epsilon'^3} \int_{\gamma'_{min}}^{\gamma'_{max}} d\gamma' \frac{N'_e(\gamma')}{\gamma'^2} F_C(q, \Gamma_e) \quad (2.8)$$

となる。以上の2式において、使用したパラメータを説明する。

- $F_C(q, \Gamma_e)$

等方的な光子と電子の分布の場合の逆コンプトン散乱の効果を表すものであり、(Compton scattering kernel)

$$F_C(q, \Gamma_e) = [2q \ln q + (1+2q)(1-q) + \frac{1}{2} \frac{(\Gamma_e q)^2}{(1+\Gamma_e q)} (1-q)] \quad (2.9)$$

で表される。ここで、

$$q \equiv \frac{\epsilon'/\gamma'}{\Gamma_e(1-\epsilon'_s/\gamma')} \quad (2.10)$$

$$\Gamma_e = 4\epsilon'\gamma' \quad (2.11)$$

$$\frac{1}{4\gamma'^2} \leq q \leq 1 \quad (2.12)$$

である。

- ϵ_s 散乱光子のエネルギー
- σ_T トムソン散乱断面積
- $t_{v,min}$

観測される時間変動のタイムスケールであり、放射プローブの共同半径を R'_b とすると、タイムスケールは光の速度に制限されるので

$$t'_v \geq \frac{R'_b}{c} \quad (2.13)$$

観測者の系から見ると、

$$t_v \geq t_{v,min} = \frac{(1+z)R'_b}{\delta_D c} \quad (2.14)$$

となる。

- $\gamma'_{min}, \gamma'_{max}$

γ' に渡って積分されている項は $\gamma'_{min}, \gamma'_{max}$ によって制限をされ、それぞれ

$$\gamma'_{min} = \frac{1}{2} \epsilon'_s \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\epsilon' \epsilon'_s}} \right) \quad (2.15)$$

$$\gamma'_{max} = \frac{\epsilon' \epsilon'_s}{\epsilon' - \epsilon'_s} H(\epsilon' - \epsilon'_s) + \gamma'_2 H(\epsilon'_s - \epsilon') \quad (2.16)$$

で示される。ここで $H(x)$ はヘヴィサイド関数を用いており、

$$H(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (x \geq 0) \end{cases}$$

である。

表 2.2 にこの SSC モデルで用いた主なパラメータをまとめる。

パラメータ	意味
z	赤方偏移
B	磁場
δ_D	ドップラー因子
$T_{v,min}$	時間変動のタイムスケール
K_e	電子スペクトルのノーマリゼーション
p_0	電子スペクトル指数 (低エネルギー側)
p_1	電子スペクトル指数 (高エネルギー側)
r_1	ローレンツ因子 (最小値)
r_2	ローレンツ因子 (最大値)
r_b	カットオフローレンツ因子

表 2.2: SSC モデルで用いたパラメータの一覧

2.2 コードの書き直しによる計算速度向上について

先行研究として本研究室に在籍していた伊藤さん (現:東京工業大学) が上記の SSC の理論式を python を用いて書かれたスクリプトがあり、それを C++ で書き直すという作業を行った。利点として、MCMC 法を用いる過程で 2 重積分を何万回もこのスクリプトを回すため、構造上計算実行速度が早い C++ に書き換えた方が良いという点が挙げられる (2.2.1 節)。また、EC モデルに対してもプログラムを書かなければならないので、自分自身の C++ の勉強に最適であった。

2.2.1 インタプリタ方式とコンパイラ方式

python と C++ の計算速度が違う理由として、python はインタプリタ型言語で C++ はコンパイラ型言語であるという点が挙げられる。コンピュータに搭載されている CPU は単なる計算機であり、「0」と「1」による 2 進数の計算しかできない。この 2 進数で書かれた命令の集まりを機械語と呼ぶ。実際にコンピュータでプログラムを動かすという事は言い換えると、機械語で与えられた命令で CPU が動くという事である。インタプリタ型とコンパイラ型ではこの機械語を作るタイミングに違いがある。以下両者の特徴をまとめる。

- インタプリタ方式

インタプリタ方式はプログラミング言語で書かれたソースコードを読み込んで、それを機械語に変換しながらコンピュータに命令を与える。つまり、プログラム実行時に変換する方式である。作成したソースプログラムをただちに実行できるという点が利点であるが、実行時にその都度変換するので実行速度に時間が掛かるというデメリットがある。

- コンパイラ方式

コンパイラ方式はプログラミング言語で書かれたソースコードを事前に機械語へ一括変換して、変換後のプログラムがコンピュータに命令を与える方式である。利点として、実行時に改めて変換する必要がないので高速で処理が可能である。一方、コンパイルする手間や、コンパイルした機械語のプログラムは他の環境 (違う OS や CPU) では実行できないというデメリットがある。

本研究では数値計算を取り扱うので、実行速度が早いコンパイラ型言語である C++ を用いて解析を進めることとする。

2.2.2 結果

伊藤さんのスクリプトで使用したパラメータを表 2.3 に示す。C++ に書き換えるにあたって、積分は光度距離を求める際にはシンプソン則を、SSC のエネルギーフラックスを求める際には長方形積分を用いた。その理由としては、本研究では正確な積分よりもできるだけ速く積分することが目的であるので時間がかかる計算部分に対して長方形積分を用いた。

パラメータ	記号	値
赤方偏移	z	0.031
磁場	B	0.038
ドップラー因子	δ_D	22.5
タイムスケール	$T_{v,min}$	9.31×10^4
電子スペクトルのノーマリゼーション	K_e	4.23×10^{42}
電子スペクトル因子 (低エネルギー側)	p_0	2.15
電子スペクトル因子 (高エネルギー側)	p_1	4.11
ローレンツ因子 (最小値)	r_1	39.8
ローレンツ因子 (最大値)	r_2	3.43×10^7
カットオフローレンツ因子	r_b	1.08×10^5

表 2.3: SSC モデルで用いた各パラメータの値

上記の値を用いて自分で C++ に書きなおした SED を図 2.2 に示す。尚、グラフ描画ソフトは matplotlib を用いている。計算速度についてであるが、シンクロトロン放射、逆コンプトン散乱の範囲を $10^{12} \sim 10^{28} [Hz]$ 、その範囲を 160 分割とし計算した。表 2.4 に python と C++ の計算時間をそれぞれ示す。

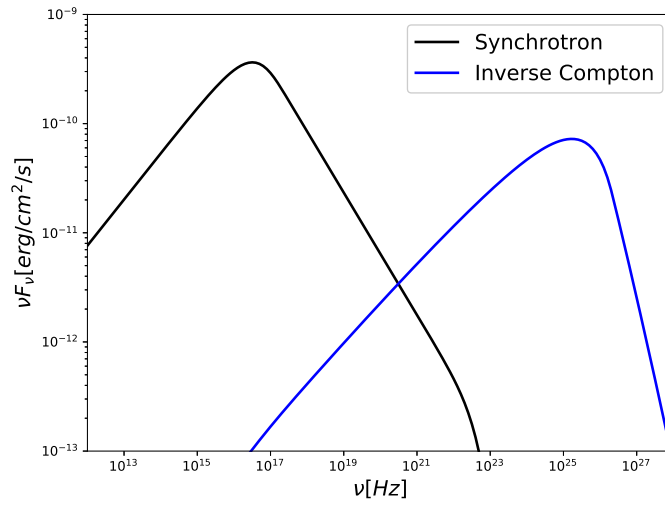


図 2.2: SSC の SED。黒線がシンクロトロン放射成分、青色が逆コンプトン散乱成分を示している。

言語	計算時間
python	48.3[s]
C++	24.8[s]

表 2.4: python と C++での計算速度の比較

python から C++に書き換えたことにより、計算速度が2倍近く早くなったことがわかった。MCMC 法ではこのプログラムを 10 万回実行するのでこの差は大きいといえる。尚、この計算速度は積分の短冊幅に依存しており、短冊幅が粗いと計算速度は早くなるが、精度が悪くなることが確認出来ている。

第3章 EC(External Compton)

3.1 放射の理論式

次に、ECモデルの理論式について述べる。ECモデルとは種光子がジェット的外部である降着円盤、BLR、ダストオーラスでも放出され、その種光子をジェット中の電子が逆コンプトン散乱する放射モデルである。逆コンプトン散乱の放射率は以下の式で表せる。(Dermer&Menon,et.al(2009)) [11]

$$\epsilon_s j(\epsilon_s, \Omega_s) = m_e c^3 \epsilon_s^2 \int d\Omega \int d\epsilon n_{ph}(\epsilon, \Omega) \times \int d\Omega_e \int d\gamma n_e(\gamma, \Omega_e) \times (1 - \cos\psi) \frac{d\sigma}{d\epsilon_s d\Omega_s} \quad (3.1)$$

ここで、 $n_{ph}(\epsilon, \omega)$ はエネルギーが $\epsilon \sim \epsilon + d\epsilon$ 内の、立体角 $\Omega \sim d\Omega$ の間の入射種光子の数密度、 $n_e(\gamma, \Omega_e)$ はローレンツ因子 $\gamma \sim \gamma + d\gamma$ 内の、立体角 $\Omega_e \sim d\Omega_e$ の間の入射電子の数密度、 $\frac{d\sigma}{d\epsilon_s d\Omega_s}$ は単位散乱光子エネルギー、単位立体角あたりの微分断面積、 ψ は入射光子と入射電子の方向のなす角である。(図 3.1)

(3.1) は異方性のある外部放射領域を含むトムソンとクライン-仁科領域で有効な完全なコンプトン散乱を計算しており、立体角の積分が2重積分であることを考えると、6重積分も計算が必要になり、計算量が膨大になることがわかる。そこで、Finke,et.al(2016) [12] では(3.1)式に様々な近似法を用いることによって積分の数を減らし、計算速度向上を早くしている。本研究ではFinke,et.al(2016)の近似式を参考にC++を用いてプログラミングを行った。

3.1.1 Head-on-Approximation

Finke,et.al(2016) [12] ではHead-on-Approximationと呼ばれる近似法を用いている。この近似法は入射光子と入射電子が逆コンプトン散乱した後、本来ならば光子と電子は別々の方向に散乱されていくが、両者とも同じ方向に散乱するという近似法である。これは、光子のエネルギー ϵ 、電子のエネルギー γ の関係が $\epsilon \ll 1 \ll \gamma$ のときに有効であり、本研究のECモデルでの逆コンプトン散乱はこの条件を満たしている。この近似によって散乱光子の立体角の情報がデルタ関数化され、以下のように表せる。

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon_s d\Omega_s} \approx \frac{d\sigma}{d\epsilon_s} \delta(\Omega_s - \Omega_e) \quad (3.2)$$

また、入射光子の偏角をそれぞれ ϕ と $\theta = \arccos(\mu)$ 、散乱後の光子の偏角をそれぞれ ϕ_s と $\theta_s = \arccos(\mu_s)$ とすると、

$$\cos\psi = \mu\mu_s + \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \mu_s^2} \times \cos(\phi - \phi_s) \quad (3.3)$$

を表せる。図 3.1 に Head-on-Approximation のイメージ図を示す。

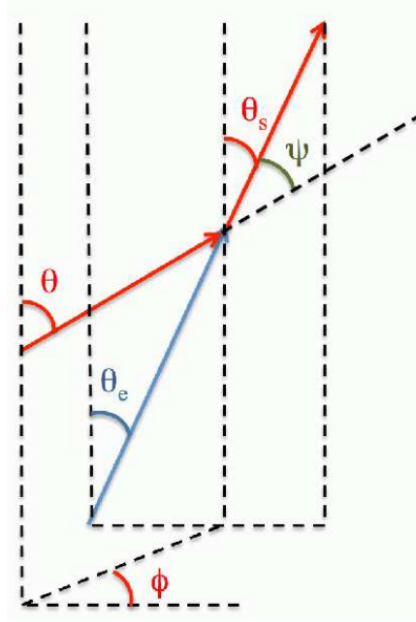


図 3.1: Head-on-Approximation のイメージ図。赤色:光子、青色:電子 [12]

この近似法により、(3.1) 式は

$$\epsilon_s j(\epsilon_s, \Omega_s) \approx m_e c^3 \epsilon_s^2 \int d\Omega \int d\epsilon n_{ph}(\epsilon, \Omega) \times \int d\gamma n_e(\gamma, \Omega_s) (1 - \cos\psi) \frac{d\sigma}{d\epsilon_s} \quad (3.4)$$

と書きなおすことができる。また、等方な環境を仮定するときには、総コンプトン散乱断面積が必要となるので、

$$\sigma(\bar{\epsilon}) = \int d\epsilon_s \frac{d\sigma}{d\epsilon_s} = \sigma_T S_0(\bar{\epsilon}) \quad (3.5)$$

を定義する。ここで、 $S_0(\bar{\epsilon})$ はエネルギー依存性を表す関数であり、

$$S_0(x) = \frac{3}{8x^2} \left[4 + \frac{2x^2(1+x)}{(1+2x^2)} + \frac{x^2 - 2x - 2}{x} \ln(1+2x) \right] \quad (3.6)$$

この関数は漸近式を持ち、 $x \ll 1$ においては、

$$S_0 \rightarrow 1 - 2x + \frac{26x^2}{5} - \frac{133x^3}{10} + \frac{1444x^4}{35} \quad (3.7)$$

$x \gg 1$ においては、

$$S_0 \rightarrow \frac{3}{8x} \left[\ln(x) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln(4) \right] \quad (3.8)$$

である。 $S_0(x)$ のグラフを図 3.2 に示す。また、自分が C++ で作った $S_0(x)$ のグラフを図 3.3 に示す。尚、グラフは matplotlib を用いた。

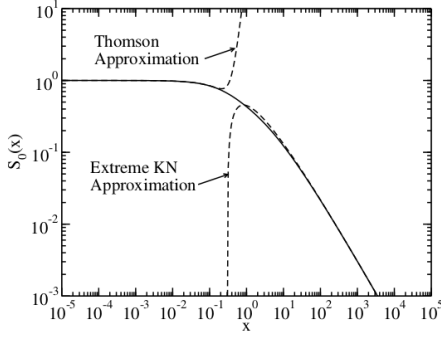


図 3.2: $S_0(x)$ のプロット。(Finke+16) 点線は $x \gg 1, x \ll 1$ における漸近線を示す。 [12]

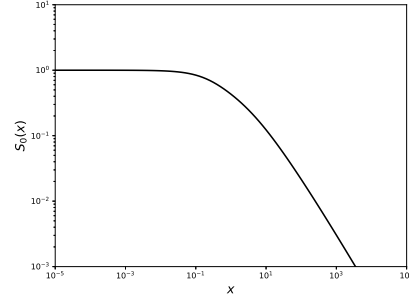


図 3.3: 自分が作った C++ の $S_0(x)$ のプロット。

3.1.2 散乱された光子の平均エネルギーについて

コンプトン散乱断面積の第 0 次モーメントを、

$$\begin{aligned} \langle \epsilon_s^0 \sigma \rangle &= \int d\Omega_s \int d\epsilon_s \frac{d\sigma}{d\epsilon_s d\Omega_s} \\ &= \sigma(\bar{\epsilon}) = \sigma_T S_0(\bar{\epsilon}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

第 1 次モーメントを、

$$\begin{aligned} \langle \epsilon_s^1 \sigma \rangle &= \int d\Omega_s \int d\epsilon_s \epsilon_s \frac{d\sigma}{d\epsilon_s d\Omega_s} \\ &= \gamma \sigma_T \left\{ S_0(\bar{\epsilon}) - \frac{3}{8\bar{\epsilon}^3} \left[\frac{\bar{\epsilon}^2}{3} \left(\frac{(1+2\bar{\epsilon})^3 - 1}{(1+2\bar{\epsilon})^3} \right) + \frac{2\bar{\epsilon}(\bar{\epsilon}^2 - \bar{\epsilon} - 1)}{1+2\bar{\epsilon}} + \ln(1+2\bar{\epsilon}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.10)$$

と定義すると (Dermer&Schlickeiser 1993; Dermer&Memon 2009) [12], [13]、散乱された光子の平均エネルギーは、

$$\langle \epsilon_s \rangle = \frac{\langle \epsilon_s^1 \sigma \rangle}{\langle \epsilon_s^0 \sigma \rangle} \quad (3.11)$$

となる。

ここで、特に役立つ量として、入射電子のエネルギーと散乱された光子の比を定義する。

$$\langle y \rangle = \frac{\langle \epsilon_s \rangle}{\gamma} = \frac{\langle \epsilon_s^1 \sigma \rangle}{\gamma \langle \epsilon_s^0 \sigma \rangle} = S_1(\bar{\epsilon}) \quad (3.12)$$

ここで $S_1(x)$ は数値計算した関数である。この $S_1(x)$ の関数にも漸近式があり、

$$S_1(x) = \begin{cases} x & (x \ll 1) \\ 1 - \frac{4}{[3\ln(2x)+0.5]} & (x \gg 1) \end{cases}$$

である。 $S_1(x)$ のグラフを図 3.4 示す。また、自分が作った $S_1(x)$ のグラフを図 3.5 に示す。

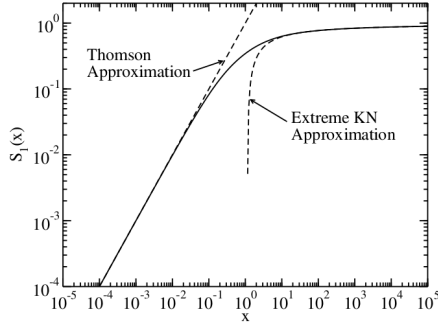


図 3.4: $S_1(x)$ のプロット。(Finke+16) 点線は $x \gg 1, x \ll 1$ における漸近線を示す [12]。

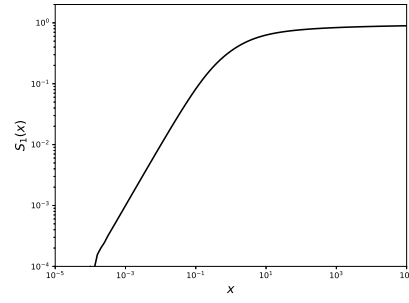


図 3.5: 自分が作った C++ の $S_1(x)$ のプロット。

3.1.3 一般的な種光子領域のデルタ関数近似

散乱断面積についてデルタ関数近似をすると、

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\epsilon_s} &\approx \sigma(\bar{\epsilon}) \delta\left(\epsilon_s - \frac{5}{4}\langle\epsilon_s\rangle\right) \\ &\approx \sigma(\bar{\epsilon}) \delta\left(\epsilon_s - \frac{5}{4}\gamma S_1(\bar{\epsilon})\right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

となる。これは散乱後の光子のエネルギーが、平均値 $\langle\frac{5}{4}\gamma S_1(\bar{\epsilon})\rangle$ に等しい場合の散乱断面積で近似するという事である。ここで $\frac{5}{4}$ は数値実験によって導出されたものである。上記の δ 関数式を書きなおすと、

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon_s} \approx \frac{4\langle\gamma\rangle}{5\epsilon_s} \sigma(\bar{\epsilon}) S_2(\bar{\epsilon}) \delta(\gamma - \langle\gamma\rangle) \quad (3.14)$$

と表すことができる。ここで、 γ は以下の式を解くことによって得られる。

$$\frac{\epsilon_s}{\langle\gamma\rangle} = \frac{5}{4} S_1(\langle\gamma\rangle) \epsilon (1 - \cos\psi) \quad (3.15)$$

(3.15) 式は数値的にしか解けないので、本研究では ZBRENT 法と呼ばれる、根の囲い込み法、二分法、およびゼロ点の近くで収束させるための逆 2 次補間を組み合わせたもので解を求める求根法を用いる。挟み撃ち法や割線法が 2 点を直線で結ぶのに対して、逆 2 次補間法は 3 点を通る逆 2 次関数 (x が y の 2 次関数) を使い、 $y = 0$ での x の値を根の推定値とする。この方法は、初期区間が根を含み、その区間で関数が計算できる限り、必ず収束することが Brent によって保証されている。数値的に求まった γ は漸近式を持ち、

$$\langle\gamma\rangle \rightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{4\epsilon_s}{5\epsilon(1-\cos\psi)}} & (x \ll 1) \\ 1 - \frac{4}{5}\epsilon_s & (x \gg 1) \end{cases}$$

と表せる。今後、使われる δ 関数近似法による計算において、表記を単純化するために $\langle\gamma\rangle \rightarrow \gamma$ とする。式 (3.14) 中の S_2 は、

$$S_2(x) = \frac{d\ln(x)}{d\ln(xS_1(x))} \quad (3.16)$$

であり、

$$S_2(x) \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} & (x \ll 1) \\ 1 & (x \gg 1) \end{cases}$$

の漸近線を持つ。図 3.6 に $S_2(x)$ のグラフを示す。また、自分が作った $S_2(x)$ のグラフを図 3.7 に示す。

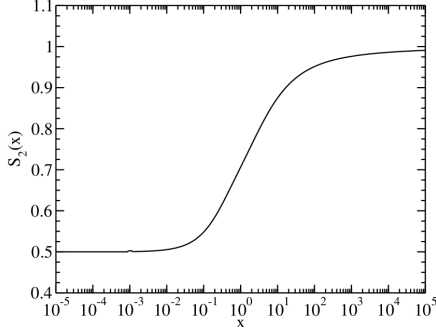


図 3.6: $S_2(x)$ のプロット。(Finke+16) [12] 点線は $x \gg 1, x \ll 1$ においての漸近線を示す。

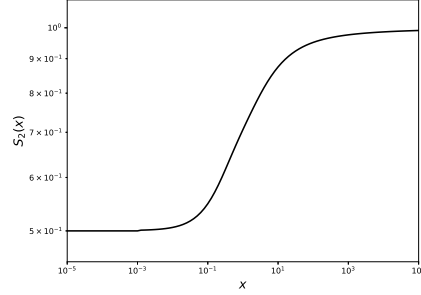


図 3.7: 自分が作った C++ の $S_2(x)$ のプロット。

(3.4) 式に (3.14) 式を代入すると、逆コンプトン散乱の放射率は $\gamma_{min} < \gamma$ において

$$\epsilon_s j(\epsilon_s, \Omega_s) \approx \frac{4}{5} \sigma_T c \epsilon_s \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\mu \int \frac{d\epsilon}{\epsilon^2} u(\epsilon, \Omega) n_e(\gamma, \Omega_s) S_3(\gamma\epsilon(1 - \cos\psi)) \quad (3.17)$$

$\gamma < \gamma_{min}$ において、

$$\epsilon_s j(\epsilon_s, \Omega_s) \approx \frac{4}{5} \sigma_T c \epsilon_s \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\mu \int \frac{d\epsilon}{\epsilon^2} u(\epsilon, \Omega) n_e(\gamma_{min}, \Omega_s) S_3(\gamma_{min}\epsilon(1 - \cos\psi)) \left(\frac{\gamma}{\gamma_{min}}\right)^2 \quad (3.18)$$

と表せる。ここで、

$$S_3(x) = x S_0(x) S_2(x), \quad (3.19)$$

$$u(\epsilon, \Omega) = m_e c^2 \epsilon n_{ph}(\epsilon, \Omega), \quad (3.20)$$

$$\gamma_{min} = \frac{\epsilon_s}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2}{\epsilon \epsilon_s (1 - \cos\psi)}} \right] \quad (3.21)$$

と定義する。

3.1.4 デルタ関数を用いた逆コンプトン散乱の理論式

視線方向に対して角度 $\theta_s = \arccos\mu_s$ で、ブラックホールに対して相対的速度 βc で動くジェットのプロープを考える。ここでパルクローレンツ因子 $\Gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ 、ドップラー因子 $\delta_D = [\Gamma(1 - \beta\mu_s)]^{-1}$ である。これは相対論的速度でジェットを放射している典型的なブレーザーを表す。このブレーザーは赤方偏

移 z 、光度距離 $d_L(z)$ とする。ジェットのブロープの共動座標系には ' を、ブラックホールの静止系はマークなし、観測値には obs と表記する。観測される νF_ν フラックスは

$$f_{\epsilon_s^{obs}} = \frac{V_b \epsilon_s j(\epsilon_s, \Omega_s)}{d_L^2} \quad (3.22)$$

で表される。ここで、 $\epsilon_s^{obs} = \epsilon_s / (1+z)$ 、 V_b は静止系におけるジェットのブロープの体積である。また、等方的な電子分布を共動座標系から、静止系に変換する式は以下で表される。

$$N_e(\gamma, \Omega) = \frac{\delta_D^3 N_e'(\gamma/\delta_D)}{4\pi} \quad (3.23)$$

$$N_e(\gamma, \Omega_e) = V_b n_e(\gamma, \Omega_e) \quad (3.24)$$

よって、FSRQ の放射モデルである EC の逆コンプトン散乱は式 (3.17)、(3.18)、(3.22) より以下となる。(Georganopoulos, et.al.(2001) [14]、Dermer, et.al.(2009) [11])

$\gamma_{min} < \gamma$ において、

$$f_{\epsilon_s^{obs}} = \frac{c\sigma_T \epsilon_s \delta_D^3}{5\pi d_L^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\mu \int_0^\infty \frac{d\epsilon}{\epsilon^2} u(\epsilon, \Omega) N_e' \left(\frac{\gamma}{\delta_D} \right) S_3(\gamma\epsilon(1 - \cos\psi)) \quad (3.25)$$

$\gamma_{min} > \gamma$ において、

$$f_{\epsilon_s^{obs}} = \frac{c\sigma_T \epsilon_s \delta_D^3}{5\pi d_L^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\mu \int_0^\infty \frac{d\epsilon}{\epsilon^2} u(\epsilon, \Omega) N_e' \left(\frac{\gamma_{min}}{\delta_D} \right) S_3(\gamma_{min}\epsilon(1 - \cos\psi)) \left(\frac{\gamma}{\gamma_{min}} \right)^2 \quad (3.26)$$

となる。ここで N_e' はべきの折れ曲がりのある電子分布である。(2.1.1 節参照)

以後、(3.24) 式と (3.25) 式から、EC モデルに使われる降着円盤、BLR、ダストトーラスから来る種光子からの逆コンプトン散乱理論式を組み立てる。

3.2 各部分からの放射成分の理論式

3.2.1 降着円盤放射の逆コンプトン散乱

降着円盤からの散乱された光子は、ジェットの背後にある点源から放射されたものと近似、つまり $\mu = \cos\theta = 1$ として近似する方法がある (Dermer, et.al.(1992))。[15] この場合のエネルギー密度は

$$u(\epsilon, \Omega) = \frac{L_{disk}}{4\pi r^2 c} \frac{\delta(\mu - 1)}{2\pi} \delta(\epsilon - \epsilon_0) \quad (3.27)$$

と表せる。ここで、 L_{disk} は降着円盤の光度 [erg/s] であり、種光子のエネルギー ϵ_0 は、

$$\epsilon_0 = 2.7 \times 10^{-4} \left(\frac{l_{Edd}}{M_8 \eta} \right)^{1/4} \left(\frac{R}{R_g} \right)^{-3/4} \quad (3.28)$$

$$R_g = \frac{GM}{c^2} \approx 1.5 \times 10^{13} M_8 cm \quad (3.29)$$

である。(3.26) 式中において、 $l_{Edd} = L_{disk}/L_{Edd}$ 、 $L_{Edd} = 1.26 \times 10^{46} M_8$ はエディントン限界光度、 η は降着効率、 $M_{BH} = 10^8 M_8 M_\odot$ は中心ブラックホール質量である。本研究では $R = 8.17 R_g$ として ϵ_0 を計算している。ここで、

$$R_g = \frac{GM}{c^2} \approx 1.5 \times 10^{13} M_8 [cm] \quad (3.30)$$

である。(3.25) 式を (3.23) 式と (3.24) 式に代入すると、 $\gamma_{min} < \gamma$ においては、

$$f_{\epsilon_s^{obs}} = \frac{\epsilon_s L_0 \sigma_T \delta_D^3}{16\pi^2 r^2 d_L^2 \epsilon_0^2} S_3[\gamma \epsilon (1 - \mu_s)] N'_e \left(\frac{\gamma}{\delta_D} \right) \quad (3.31)$$

$\gamma_{min} > \gamma$ においては、

$$f_{\epsilon_s^{obs}} = \frac{\epsilon_s L_0 \sigma_T \delta_D^3}{16\pi^2 r^2 d_L^2 \epsilon_0^2} S_3[\gamma_{min} \epsilon (1 - \mu_s)] N'_e \left(\frac{\gamma}{\gamma_{min}} \right) \quad (3.32)$$

となる。図 3.8 に降着円盤放射の逆コンプトン散乱の SED を示す。また図 3.9 に自分が作った降着円盤放射の逆コンプトン散乱の SED を示す。

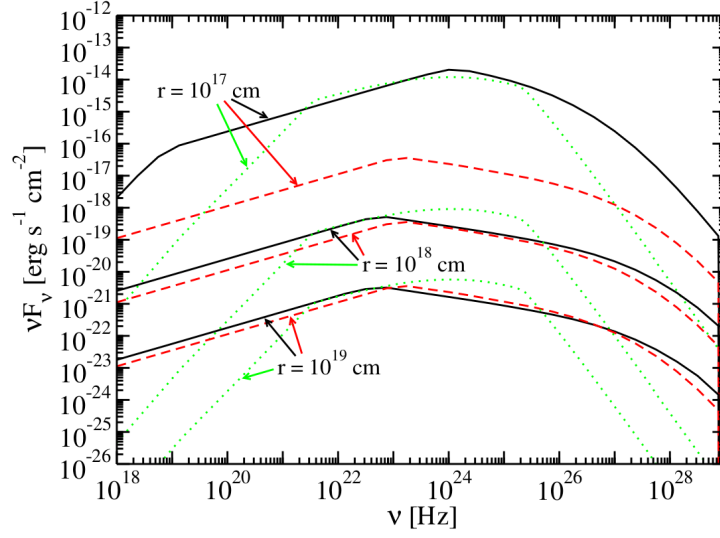


図 3.8: 降着円盤放射逆コンプトン散乱の SED。(Finke+16) [12] 赤色の点線が本研究で用いた降着円盤のモデルである。ブラックホールからジェットのプロープまでの距離 r を変化させてプロットした。

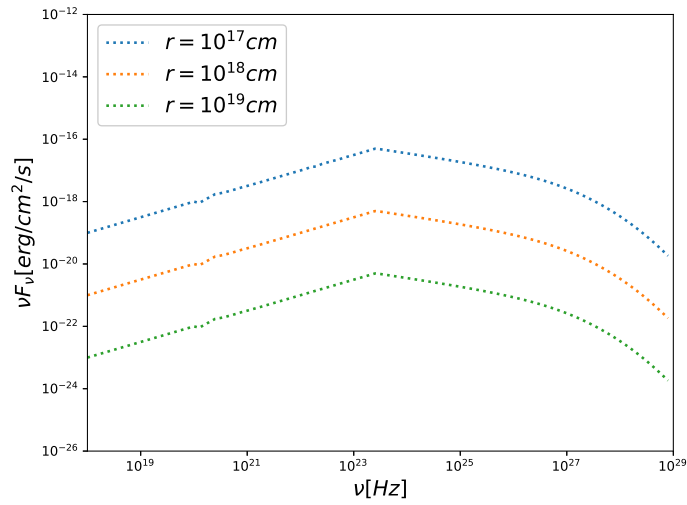


図 3.9: 自分で作った降着円盤放射逆コンプトン散乱の SED。ブラックホールからジェットのプローブまでの距離 r を変化させてプロットした。

3.2.2 BLR とダストトーラスの種光子密度

降着円盤の放射は、BLR に吸収されて輝線として再放射されたり、ダストトーラスに吸収され、黒体放射と近似して、赤外線として再放射することができる。その位置関係を図 3.10 に示す。

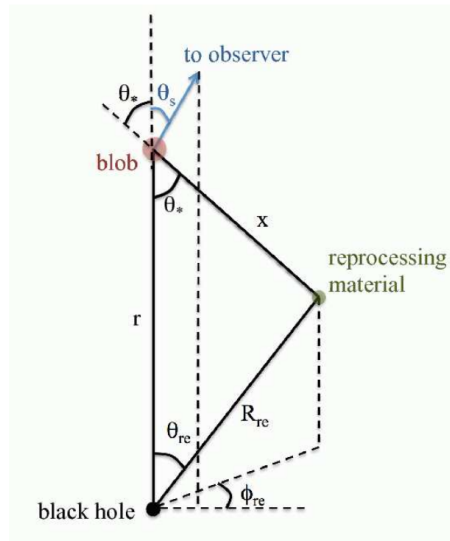


図 3.10: プローブの電子によって逆コンプトン散乱されている種光子の再放射の位置関係の図 [12]

降着円盤の放射が中心ブラックホールから起こっているとすると、その再放射は等方的であり、その放射率を $j_{re}(\epsilon, \Omega_{re}; R_{re})$ とすると、再放射によるエネルギー密度は、

$$u_{re} = \int dV_{re} \frac{j_{re}(\epsilon, \Omega_{re}; R_{re})}{4\pi x^2 c} \quad (3.33)$$

と表せる。ここで R_{re} は中心ブラックホールと再放射する媒質との距離、 x は再放射する媒質とジェットプロープまでの距離である。 r は中心ブラックホールからジェットプロープまでの距離であり、

$$x^2 = R_{re}^2 + r^2 - 2rR_{re}\mu_{re} \quad (3.34)$$

である。単位立体角あたりのエネルギー密度は δ 関数により、(Bocher & Dermer(1995) [16], Dermer, et. al(2009) [11])

$$\begin{aligned} u_{re}(\epsilon, \omega) &= \int dV_{re} \frac{j_{re}(\epsilon, \Omega_{re}; R_{re})}{4\pi x^2 c} \delta(\phi - \phi_{re}) \delta(\mu - \mu_*) \\ &= \frac{1}{4\pi c} \int_0^{2\pi} d\phi_{re} \int_{-1}^1 d\mu_{re} \int_0^\infty dR_{re} \left(\frac{R_{re}}{x}\right)^2 j_{re}(\epsilon, \Omega_{re}; R_{re}) \delta(\phi - \phi_{re}) \delta(\mu - \mu_*) \end{aligned} \quad (3.35)$$

と表せる。ここで、

$$\mu_*^2 = 1 - \left(\frac{R_{re}}{x}\right)^2 (1 - \mu_{re}^2) \quad (3.36)$$

である。以後、(3.35) 式に BLR、ダストトラスの放射率 $j_{re}(\epsilon, \Omega; R_{re})$ を代入することによって種光子のエネルギー密度 $u(\epsilon, \Omega)$ を求め、さらに (3.25) 式、(3.26) 式に代入することによって逆コンプトン散乱のエネルギーフラックス $f_{\epsilon_s^{obs}}$ を求める。

3.2.3 BLR 放射の逆コンプトン散乱

ブラックホールの周りに分布している BLR は降着円盤の放射を輝線放射に再加工する。ここでは BLR 半径 R_{li} である薄い球殻から放射されている輝線を考える。放射される光子の無次元量エネルギーを ϵ_{li} 、BLR による再放射効率を ξ とすると、ある単一の輝線の放射率 $j_{re}(\epsilon, \Omega_{re}; R_{li})$ は、

$$j_{re}(\epsilon, \Omega_{re}; R_{li}) = \frac{\xi L_{disk}}{4\pi R_{li}^2} \delta(\epsilon - \epsilon_{li}) \delta(R_{re} - R_{li}) \quad (3.37)$$

と表せる。(3.35) 式に代入することで、

$$u_{re}(\epsilon, \Omega) = \frac{\xi_{li} L_{disk}}{(4\pi)^2 c} \delta(\epsilon - \epsilon_{li}) \int_{-1}^1 \frac{d\mu_{re}}{x^2} \delta(\mu - \mu_*) \quad (3.38)$$

が得られ、これは BLR の輝線のエネルギー密度を表す。従って観測される BLR による逆コンプトン散乱フラックスは、 $\gamma_{min} < \gamma$ のとき、

$$f_{\epsilon_s^{obs}} = \frac{\xi_{li} L_{disk} \sigma_T \delta_D^3}{80\pi^3 d_L^2} \left(\frac{\epsilon_s}{\epsilon_{li}^2}\right) \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 \frac{d\mu_{re}}{x^2} S_3[\gamma\epsilon_0(1 - \cos\bar{\psi})] N'_e \left(\frac{\gamma}{\delta_D}\right) \quad (3.39)$$

$\gamma_{min} > \gamma$ のとき、

$$f_{\epsilon_s^{obs}} = \frac{\xi_{li} L_{disk} \sigma_T \delta_D^3}{80\pi^3 d_L^2} \left(\frac{\epsilon_s}{\epsilon_{li}^2}\right) \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 \frac{d\mu_{re}}{x^2} S_3[\gamma_{min}\epsilon_0(1 - \cos\bar{\psi})] N'_e \left(\frac{\gamma_{min}}{\delta_D}\right) \left(\frac{\gamma}{\gamma_{min}}\right)^2 \quad (3.40)$$

ここで、

$$\cos\bar{\psi} = \mu_*\mu_s + \sqrt{1 - \mu_*^2}\sqrt{1 - \mu_s^2}\cos\phi \quad (3.41)$$

である。図 3.11 はブラックホールから放射プローブまでの距離 r を変えた BLR による逆コンプトン散乱フラックスである。 r が小さいほど放射フラックスが大きくなる。また、図 3.12 に自分が作った BLR による逆コンプトン散乱フラックスを示す。

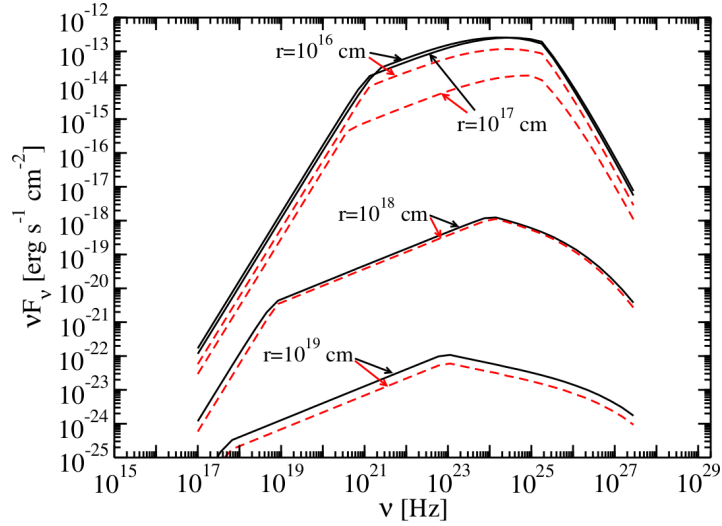


図 3.11: BLR による逆コンプトン散乱の SED。(Finke+16) [12] 黒線が本研究で用いた BLR のモデルである。ブラックホールからジェットのプローブまでの距離 r を変化させてプロットした。

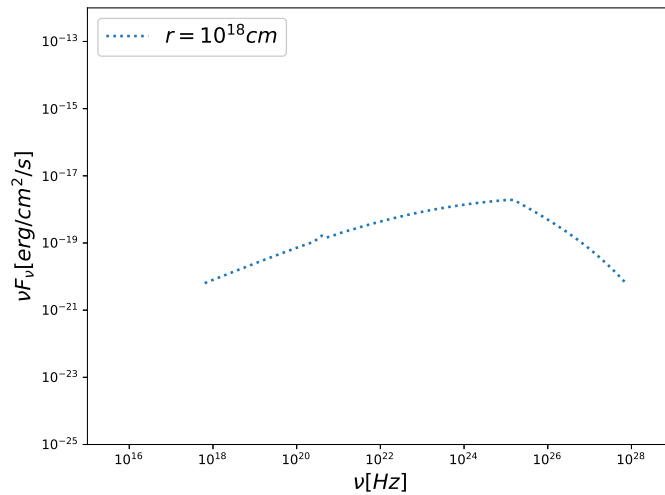


図 3.12: 自分で作った降着円盤放射逆コンプトン散乱の SED。典型的な r の値でプロットしている。

3.2.4 ダストトールス放射の逆コンプトン散乱

AGN 中のダストトールスは黒体として放射し、ジェットの本と直交して向いていると思われていたが、正確な形は不確かな所がある。本研究では、ダストトールスはプランク分布のピークエネルギーを持つ単色としての黒体とし、 $\epsilon = 2.7\Theta$ 、ここで $\Theta = kT_{dt}/m_e c^2$ はダストトールスの無次元温度である。さらにダストトールスは半径 R_{dt} の薄い環で出来ているとして近似している。エネルギーと半径、角度に対して δ 関数近似を行うと、放射率 $j_{re}(\epsilon, \Omega; R_{dt})$ は、

$$j_{re}(\epsilon, \Omega; R_{dt}) = \frac{\xi_{dt} L_{disk}}{4\pi R_{re}^2} \delta(R_{re} - R_{dt}) \delta(\epsilon - 2.7\Theta) \delta(\mu_{re} - 0) \quad (3.42)$$

と表せる。ここで、 ξ_{dt} はダストトールス散乱効率である。(3.35) 式に代入することで、

$$u_{re}(\epsilon, \Omega) = \frac{\xi_{dt} L_{disk}}{(4\pi)^2 c x^2} \delta(\mu - r/x) \delta(\epsilon - 2.7\Theta) \quad (3.43)$$

が得られ、これはダストトールスのエネルギー密度を表す。ここで、

$$x^2 = R_{dt}^2 + r^2 \quad (3.44)$$

である。従って、観測されるダストトールスによる逆コンプトン散乱フラックスは、 $\gamma_{min} < \gamma$ のとき、

$$f_{\epsilon_s^{obs}} = \frac{\epsilon_s \xi_{dt} \sigma_T \delta_D^3}{80\pi^3 (2.7\Theta)^2 x^2 d_L^2} \int_0^{2\pi} d\phi S_3[2.7\gamma\Theta(1 - \cos\bar{\psi})] N'_e\left(\frac{\gamma}{\delta_D}\right) \quad (3.45)$$

$\gamma_{min} > \gamma$ のとき、

$$f_{\epsilon_s^{obs}} = \frac{\epsilon_s \xi_{dt} \sigma_T \delta_D^3}{80\pi^3 (2.7\Theta)^2 x^2 d_L^2} \int_0^{2\pi} d\phi S_3[2.7\gamma_{min}\Theta(1 - \cos\bar{\psi})] N'_e\left(\frac{\gamma_{min}}{\delta_D}\right) \left(\frac{\gamma}{\gamma_{min}}\right)^2 \quad (3.46)$$

と表すことができる。ここで、

$$\cos\bar{\psi} = \frac{r\mu_s}{x} + \sqrt{1 - \frac{r^2}{x^2}} \sqrt{1 - \mu_s^2} \cos\phi \quad (3.47)$$

である。また、ダストトールスの半径 R_{dt} は

$$\begin{aligned} R_{dt} &= 3.5 \times 10^{18} \left(\frac{L_{disk}}{10^{45} \text{ergs}^{-1}} \right)^{1/2} \times \left(\frac{T_{dt}}{10^3 \text{K}} \right)^{-2.6} \text{cm} \\ &= 8 \times 10^5 \left(\frac{l_{Edd}}{M_8} \right)^{1/2} \times \left(\frac{T_{dt}}{10^3 \text{K}} \right)^{-2.6} R_g \end{aligned} \quad (3.48)$$

である (Nenkova, et. al(2008b) [17], Sikora, et. al(2009) [18])。図 3.13 はブラックホールから放射プローブまでの距離 r を変えたダストトールスによる、観測される逆コンプトン散乱フラックスである。また、図 3.14 は自分で作ったダストトールスによる、観測される逆コンプトン散乱フラックスである。まとめとして、表 3.1 は EC のコードを書くにあたって用いたパラメータである。

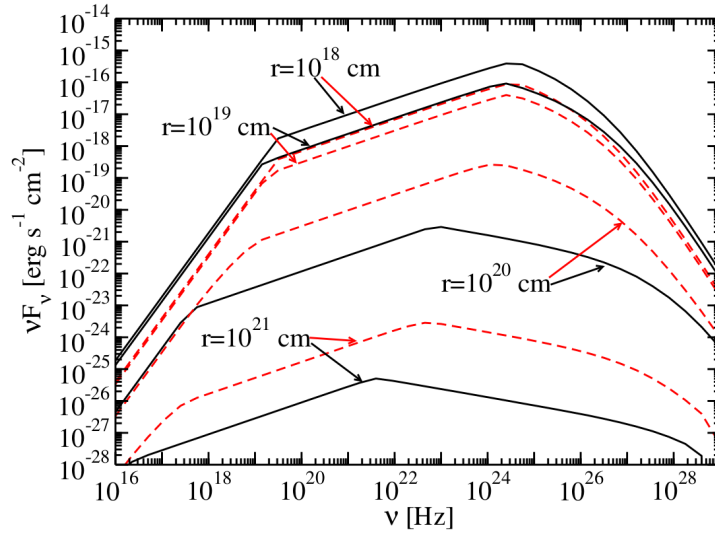


図 3.13: ダストトラスによる観測される逆コンプトン散乱の SED。(Finke+16)) [12] 黒線が本研究で用いたダストトラスのモデルである。ブラックホールからジェットのプロープまでの距離 r を変化させてプロットした。

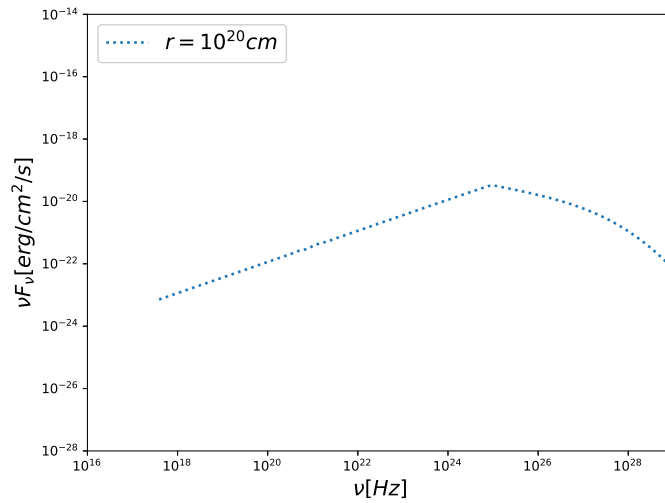


図 3.14: 自分で作ったダストトラスによる観測される逆コンプトン散乱の SED。典型的な r の値でプロットしている。

表 3.1: EC モデルで用いた各パラメータの名称と記号と値の一覧

パラメータ	記号	値
ローレンツ因子	γ	40
ドップラー因子	δ_D	40
磁場 (G)	B	0.56
ローレンツ因子 (最小値)	γ'_1	20
ローレンツ因子 (最大値)	γ'_2	5×10^7
カットオフローレンツ因子	γ'_b	10^4
電子スペクトル指数 (低エネルギー側)	p_0	2
電子スペクトル指数 (高エネルギー側)	p_1	3.5
ブラックホール質量 (M_\odot)	M_{BH}	1.2×10^9
重力半径 (cm)	R_g	1.8×10^{14}
降着円盤光度 (erg/s)	L_{disk}	2×10^{46}
降着効率	η	1/12
Disk の電子スペクトルのノーマリゼーション	K_{disk}	10^{40}
BLR 無次元量エネルギー	ϵ_{li}	2×10^{-5}
BLR 散乱効率	ξ_{li}	0.024
BLR 半径 (cm)	R_{li}	10^{17}
BLR の電子スペクトルのノーマリゼーション	K_{BLR}	10^{40}
DT 温度	T_{dt}	10^3
DT 散乱効率	ξ_{dt}	0.1
DT の電子スペクトルのノーマリゼーション	K_{DT}	10^{40}
ブラックホールからジェットのプロープまでの距離 (cm)	r	$10^{17} \sim 10^{19}$

3.3 近似の妥当性

これまでの節で用いた δ 関数近似法により、従来に比べ飛躍的に計算速度が速くなる。この節では、その近似法が妥当かどうかを述べる。図 3.15 に示すのは正確に計算した降着円盤、BLR と δ 関数近似を用いて計算した降着円盤、BLR の逆コンプトン散乱の比較図である。

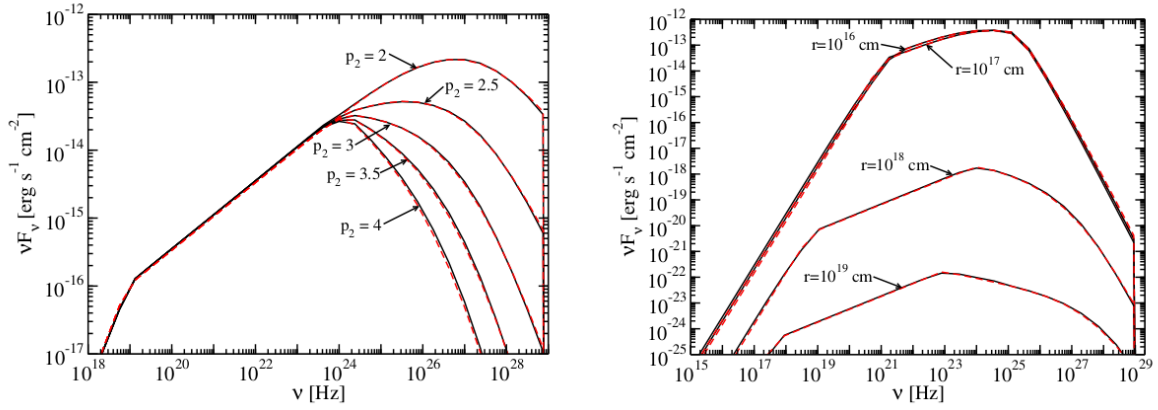


図 3.15: 正確な逆コンプトン散乱と δ 関数近似を用いた逆コンプトン散乱 (Finke+16) [12]

図 3.15 について詳しく説明する。両方の図とも黒線が正確に計算したグラフ、赤色の点線が δ 関数近似法を用いたグラフである。(Finke,et.al(2016)) [12] 左の図は降着円盤の観測される逆コンプトン散乱のフラックスであり、電子分布の折れ曲がりへのべきである p_2 の値を変えてプロットした図である。右の図はブラックホールから放射プローブまでの距離 r を変えた BLR による、観測される逆コンプトン散乱のフラックスである。両方の図から見てわかる通り、近似の有無に依らず結果はほとんど一致していることが読み取れる。尚、逆コンプトン散乱のパラメータは数が多いため、すべての比較をすることは本論文では避けることとする。また、 δ 近似法を用いることによって Finke,et.al(2016) [12] では、正確な計算と比較して積分ひとつ毎に 10 倍以上計算速度が向上したと述べている。

3.4 δ 関数近似による SSC 計算式の高速度化

Finke,et.al(2016) [12] では、 δ 関数近似を用いることによって 2 章で書いた SSC の逆コンプトン散乱側の理論式を書き換え、積分の数を減らすことによって計算速度を早くすること可能にした。本節ではその概要を述べる。

はじめに、全角度に渡って積分した逆コンプトン散乱断面積を次のように定義する。

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\mu (1-\mu) \sigma(\gamma\epsilon(1-\mu)) \\ &= \frac{3\sigma_T(2\pi)}{8(\gamma\epsilon)^2} M_0(4\gamma\epsilon) \end{aligned} \quad (3.49)$$

ここで、

$$M_0(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4(1+x)} - \frac{1}{4} + 2Li_2(-x) + \left(\frac{x}{2} + \frac{9}{2} + \frac{4}{x}\right) \log(1+x) - 4 \quad (3.50)$$

を定義する。 $Li_2(x)$ は dilogarithm function である。この $M_0(x)$ には漸近式があり、 $x \ll 1$ において、

$$M_0(x) \rightarrow \frac{x^2}{3} - \frac{2x^3}{9} + \frac{13x^4}{60} - \frac{133x^5}{600} \quad (3.51)$$

$x \gg 1$ において、

$$M_0(x) \rightarrow \frac{x}{2} \left(\ln(x) - \frac{1}{2} \right) + 3.114 \ln(x) - \ln^2 \left(\frac{x}{2} \right) - 6.559 + \frac{2}{x} (2 \ln(x) + 3.249) \quad (3.52)$$

である。図 3.16 に $M_0(x)$ のグラフを示す。また、図 3.17 に自分が作った $M_0(x)$ のグラフを示す。

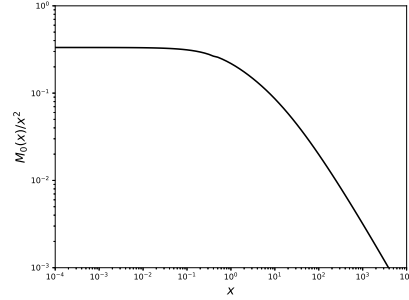
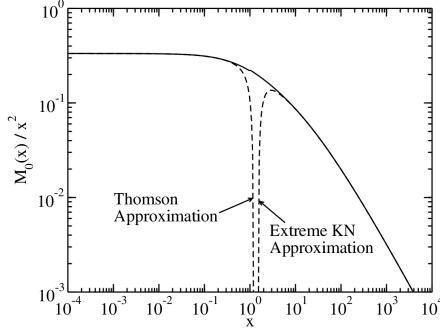


図 3.16: $M_0(x)$ のプロット。点線は $x \gg 1, x \ll 1$ においての漸近線を示す。(Finke+16) [12]

図 3.17: 自分が作った C++ の $M_0(x)$ のプロット。

さらに、角度で平均化した光子のエネルギー-入射電子のエネルギーとの比を定義する。

$$\begin{aligned} \langle y \rangle_{\mu, \phi} &= \frac{\langle \epsilon_s \rangle_{\mu, \phi}}{\gamma} \\ &= \frac{\int_0^\infty dy y \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\mu (1 - \mu) \frac{d\sigma}{d\epsilon_s}}{\int_0^\infty dy \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\mu (1 - \mu) \frac{d\sigma}{d\epsilon_s}} \\ &= M_1(4\gamma\epsilon) \end{aligned} \quad (3.53)$$

(3.53) 式の中の μ と ϕ の積分は Jones(1968) [19] と Blumenthal&Gould(1970) [20] によって以下のように計算された。

$$M_1(x) = \frac{\int_0^{x/(1+x)} dy y J_C(x, y)}{\int_0^{x/(1+x)} dy J_C(x, y)} \quad (3.54)$$

ここで、

$$J_C(x, y) = 2w \ln w + (1 + 2w)(1 - w) + \frac{1}{2} \frac{(xw)^2}{1 + xw} (1 - w) \quad (3.55)$$

$$w = \frac{y}{x(1 - y)} \quad (3.56)$$

である。また、 $M_1(x)$ は漸近式を持ち、

$$M_0(x) \rightarrow \begin{cases} x/3 & (x \ll 1) \\ 0.6279 & (x \gg 1) \end{cases}$$

である。図 3.18 に $M_1(x)$ のグラフを示す。また、図 3.19 に $M_1(x)$ のグラフを示す。

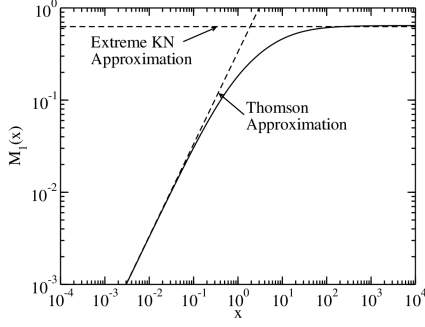


図 3.18: $M_1(x)$ のプロット。(Finke+16) [12] 点線は $x \gg 1, x \ll 1$ における漸近線を示す。

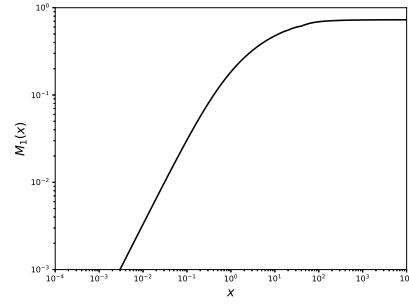


図 3.19: 自分が作った C++ の $M_1(x)$ のプロット。

等方的な種光子領域では、

$$u(\epsilon, \Omega) = \frac{u(\epsilon)}{4\pi} \quad (3.57)$$

球対称を仮定すると、逆コンプトン散乱放射率を以下のようにになる。

$$\epsilon_s j(\epsilon_s) = \frac{c\epsilon_s^2}{(4\pi)^2} \int_0^\infty \frac{d\epsilon}{\epsilon} u(\epsilon) \int_1^\infty d\gamma n_e(\gamma) \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\mu (1-\mu) \frac{d\sigma}{d\epsilon_s} \quad (3.58)$$

ここで、 δ 関数近似を用いると、

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\mu (1-\mu) \frac{d\sigma}{d\epsilon_s} \\ & \approx \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\mu (1-\mu) \sigma(\gamma\epsilon(1-\mu)) \delta\left(\epsilon_s - \frac{3}{2}\langle\epsilon_s\rangle_{\mu,\phi}\right) \\ & \approx \frac{3\pi\sigma_T}{4\gamma^2\epsilon^2} M_0(4\gamma\epsilon) \delta\left(\epsilon_s - \frac{3}{2}\gamma M_1(4\gamma\epsilon)\right) \end{aligned} \quad (3.59)$$

と表すことができる。ここで、 $\frac{3}{2}$ は数値的な実験によって導出されている。(3.59) 式を (3.58) 式に代入し、 μ, ϕ, γ で積分すると、 $\gamma_{min} < \gamma$ では、

$$\epsilon_s j(\epsilon_s) = \frac{c\sigma_T\epsilon_s}{32\pi} \int_0^\infty \frac{d\epsilon}{\epsilon^3} u(\epsilon) \frac{n_e(\gamma)}{\gamma} M_3(4\gamma\epsilon) \quad (3.60)$$

$\gamma_{min} > \gamma$ では、

$$\epsilon_s j(\epsilon_s) = \frac{c\sigma_T\epsilon_s}{32\pi} \int_0^\infty \frac{d\epsilon}{\epsilon^3} u(\epsilon) \frac{n_e(\gamma_{min})}{\gamma_{min}} M_3(4\gamma_{min}\epsilon) \left(\frac{\gamma}{\gamma_{min}}\right)^{3/2} \quad (3.61)$$

と逆コンプトン散乱の放射率が求まる。ここで、

$$M_3(x) = M_0(x)M_2(x) \quad (3.62)$$

$$M_2(x) = \frac{d\ln(x)}{d\ln(xM_1(x))} \quad (3.63)$$

である。ここで、 $M_2(x)$ は漸近式を持ち、

$$M_2(x) \rightarrow \begin{cases} 1/2 & (x \ll 1) \\ 1 & (x \gg 1) \end{cases}$$

を持つ。図 3.20 に $M_2(x)$ のグラフを示す。また、図 3.21 に自分の作った $M_2(x)$ のグラフを示す。

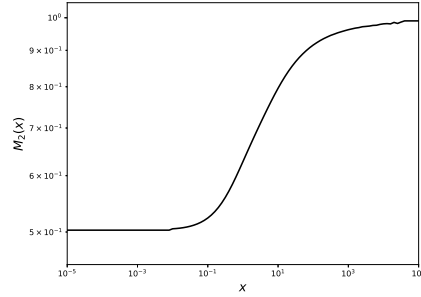
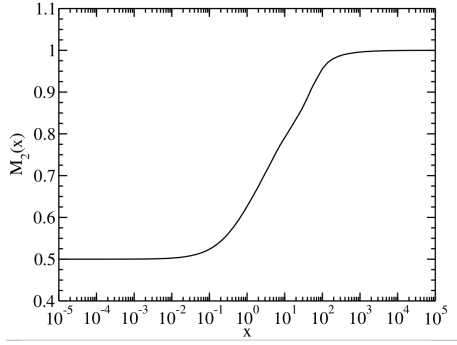


図 3.20: $M_2(x)$ のプロット。(Finke+16) [12] 点線は $x \gg 1, x \ll 1$ における漸近線を示す。 図 3.21: 自分が作った C++ の $M_2(x)$ のプロット。

また、

$$\gamma_{min} = \frac{\epsilon_s}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\epsilon \epsilon_s}} \right] \quad (3.64)$$

である。

さらに、 γ は以下の式を解くことで得られる。

$$\frac{\epsilon_s}{\gamma} = \frac{3}{2} M_1(4\gamma\epsilon) \quad (3.65)$$

上記の式は数値的にしか解けないので、ZBRENT 法を用いて解を求めた。 γ は漸近式を持ち、

$$\gamma \rightarrow \begin{cases} \sqrt{\epsilon_s/(2\epsilon)} & (x \ll 1) \\ \epsilon_s/(0.9419) & (x \gg 1) \end{cases}$$

である。

ここで、観測される逆コンプトン散乱フラックスは (3.60) 式と (3.61) 式から、 $\gamma_{min} < \gamma$ において

$$f_{\epsilon_s^{obs}} = \frac{3\sigma_T \epsilon_s^{obs}}{32\pi c^2 t_{v,min}^2 \delta_D^2} \int_0^\infty d\epsilon' \frac{f_\epsilon^{sy}}{\epsilon'^4} \frac{N'_e(\gamma')}{\gamma'} M_3(4\gamma'\epsilon') \quad (3.66)$$

$\gamma_{min} > \gamma$ において

$$f_{\epsilon_s^{obs}} = \frac{3\sigma_T \epsilon_s^{obs}}{32\pi c^2 t_{v,min}^2 \delta_D^2} \int_0^\infty d\epsilon' \frac{f_\epsilon^{sy}}{\epsilon'^4} \frac{N'_e(\gamma'_{min})}{\gamma'_{min}} M_3(2\gamma'_{min}\epsilon') \left(\frac{\gamma'}{\gamma'_{min}} \right)^{3/2} \quad (3.67)$$

となる。ここで、 f_ϵ^{sy} は観測されるシンクロトロン放射のフラックスである。(3.66) 式、(3.67) 式と (2.8) 式を見比べてみると、たしかに積分の数が 2 重から 1 重に減っているのが、計算速度が早くなることがわかる。

第4章 MCMC法とその解析結果

4.1 ベイズ統計

ベイズの統計はベイズの公式の考え方に基づき、観測事象 (観測された事実) から、推定したい事柄 (その起因である原因事象) を、確立的な意味で推論することである。本研究において観測事象はデータで、推論したい事柄はパラメータ (磁場やドップラー因子など) である。ベイズの公式を以下に示す。

$$P(x|y) = \frac{P(y|x)P(x)}{Z} \quad (4.1)$$

$$Z = \sum_x P(y|x)P(x) \quad (4.2)$$

まず、各種パラメータは全てひとまとめにしてベクトル x と置く。左辺の $P(x|y)$ はデータ y が得られたときに x が従う確立分布で、ベイズ統計学ではこれを事後分布 (posterior distribution) と呼ぶ。次に右辺について説明する。分子の $P(y|x)$ は、 x の値が決まっているときにデータ y が観測される確率である。本研究の場合、尤度関数がこれに相当する。 $P(x)$ はデータ y がないときのパラメータ x の確率分布で、ベイズ統計モデルではこれを事前分布 (prior distribution) と呼ぶ。データがないときのパラメータ x の事前分布は経験的に決められる。右辺の分母 Z は確率の総和を 1 とするための規格化定数である。つまり、ベイズ統計モデルとは、

$$\text{事後分布} = \frac{\text{尤度} \times \text{事前分布}}{\text{データが得られる確率}} \propto \text{尤度} \times \text{事前分布} \quad (4.3)$$

といった構造をもつ統計モデルであるということが出来る。統計科学の領域において、マルコフ連鎖モンテカルロ法 (MCMC 法) が最も利用されているのは、このベイズ統計に関連した部分である。ベイズ統計では MCMC を事後分布 $P(x|y)$ から x のサンプルを得るために利用される。 [21]

4.2 MCMC法のアルゴリズム

MCMC とは多変量の確率分布からサンプルを得るための一群の手法である。その方法の一般性と有用性から現在物理学、統計学のみならず、生物学や心理学などにも応用されている。マルコフ連鎖とは、1 つ前の状態によって次の状態が決まる連鎖、モンテカルロ法とは乱数を用いた数値計算技法を意味する。本研究では、MCMC 法の中でも最も簡単なメトロポリス法を用いてパラメータの推定を行った。 [24]

4.2.1 メトロポリス法

この章ではまず、メトロポリス法の手順を説明する。

1. パラメータ x の初期値 x_0 を選ぶ。

2. x_0 を増やすか減らすかをランダムに決める。(新しく選んだ x の値を x_1)
3. 候補の状態と現在の状態との事後確率の比を以下のように計算する。

$$r = \frac{P(x_1)}{P(x_0)} \quad (4.4)$$

4. パラメータ x の更新を行う。

(a) $r > 1$ のとき

無条件で x_0 の値を x_1 に更新する。

(b) $r < 1$ のとき

確率 r で x_0 の値を x_1 に更新する。具体的には、一様乱数 $R(0 < R < 1)$ を発生させ、以下で更新するかどうかを決める。

- $r \geq R$... 更新する
- $r < R$... 更新しない

5. 以上のプロセスを十分長い時間繰り返し、初期値の影響を受けていると思われる部分を排除する「Burn-in」という操作を行う。その後、定常分布を作成する。図 4.1 は MCMC ステップに対するパラメータの推移を示しており、トレース図と呼ばれる。図 4.2 はこの事後分布を示している。

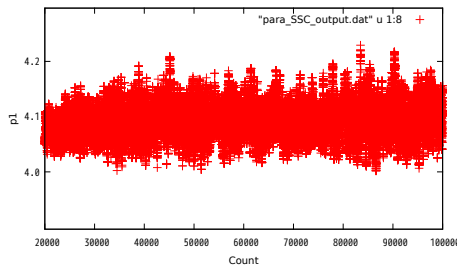


図 4.1: パラメータのトレース図。横軸:ステップ数、縦軸:パラメータ値。図より、パラメータ値がある程度の不定性を持たせて収束している。

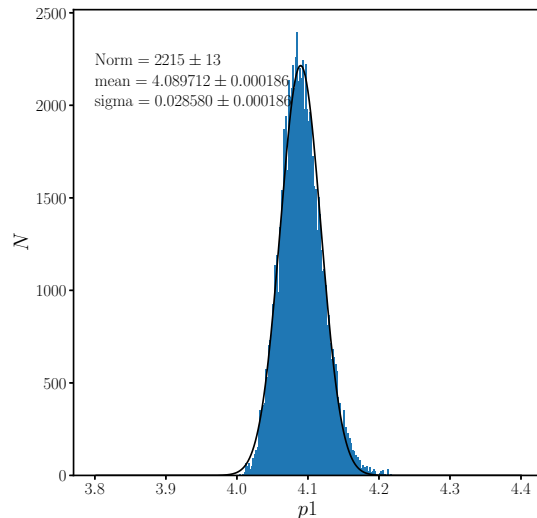


図 4.2: 事後分布。横軸:パラメータ、縦軸:事後確率を示す。

以上のように、メトロポリス法のアルゴリズムはシンプルである。しかし、パラメータごとに最適な提案分布に調整する必要があり、パラメータの数が増えていくと、その調整に時間がかかるという欠点がある。そこで、その欠点を克服するために新しく考えられたのが次に示す適応的メトロポリス法である。

4.2.2 適応的メトロポリス法

本研究では適応的メトロポリス法を用いる。これは、パラメータをより効率的かつ迅速に収束させるために各パラメータの提案分布をより適したものと更新させる方法である。ここでは、提案分布を各パラメータ間の相関を考えた多次元正規分布を用いた。

$$f(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^p \sqrt{|\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)\right) \quad (4.5)$$

ここで Σ はパラメータの分散共分散行列、 μ は各パラメータの平均値であり、 T は転置、 p は x の次元を表す。また、Robbins-Monro アルゴリズム [22] より、メトロポリス法で次点の状態 $x^{(n)}$ が得られたとき

$$\begin{aligned} \mu^{(n)} &\leftarrow \mu^{(n-1)} + h_n(x^{(n)} - \mu^{(n-1)}) \\ \Sigma^{(n)} &\leftarrow \Sigma^{(n-1)} + u_n \left((x^{(n)} - \mu^{(n-1)})(x^{(n)} - \mu^{(n-1)})^T - \Sigma^{(n-1)} \right) \\ \sigma^{2(n)} &\leftarrow \sigma^{2(n-1)} + s_n (FA^{(n)} - \alpha) \end{aligned} \quad (4.6)$$

のように更新していく。ただし、 $FA^{(n)}$ は n ステップ目でサンプル候補 x^n が採択されたら 1、棄却されたら 0 をとるような変数である。また、 h_n, u_n, s_n は、それぞれ $n \rightarrow \infty$ で 0 に収束し、和は発散し、二乗和は収束する学習関数、 $\mu^{(n)}$ は Σ の更新に必要な補助パラメータであり、目的分布の期待値を学習する。本研究では、更新則の学習係数は $h_n = u_n = s_n = 10/(t + 100)$ とし、目標の平均採択率は $\alpha = 0.234$ としている。以下に、適応的メトロポリス法のアルゴリズムを示す。

1. サンプルの初期値、パラメータ初期値 $\theta^{(0)}$ を設定
2. パラメータ $\theta^{(n-1)}$ をもつ提案分布を用いて、候補の生成、採択の判定を行い、次点の状態を作る。その後 (4.6) 式でパラメータを更新する。

4.3 人工データの MCMC フィッティング

これから、第 3 章で述べた EC モデルに対して適応的メトロポリス法を適用する。尚、適応的メトロポリス法も C++ を用いてプログラミングを行った。まず線形回帰分析で正しく動いていることを確認した。その後、山田卒論で述べている SSC モデルに対して適応的メトロポリス法を適応させた。具体的には、山田卒論第 4 章 1 節の人工データを用いた解析を行い、同様の結果が出るかどうか確かめた。計算の際に使用したパラメータを表 4.1 に示す。山田卒論では、事前分布を置かず全てのパラメータを推定するといくつかのパラメータが独立して決まらなかった。そこで各パラメータの相関係数を取り、磁場 B 、ドップラー因子 δ_D とタイムスケール T の相関が強いことがわかったので、観測からある程度推定できるドップラー因子 δ_D とタイムスケール T に対して事前分布を置くことでパラメータを収束させている。 δ_D は電波干渉計による観測から、時間とともに電波源が移動する様子が観測できるので、その見かけの速度から計算できる。まず、上記のパラメータ値で SSC を計算し、いくつかのプロット点を抜き出して y 軸方向に標準偏差 50 の正規乱数を作成した。(図 4.3)

パラメータ	記号	値
赤方偏移	z	0.031
磁場	B	0.037
ドップラー因子	δ_D	22.45
タイムスケール (対数値)	$\log_{10} T_{v,min}$	4.97
電子スペクトルのノーマリゼーション (対数値)	$\log_{10} K_e$	42.63
電子スペクトル因子 (低エネルギー側)	p_0	2.15
電子スペクトル因子 (高エネルギー側)	p_1	4.11
ローレンツ因子 (最小値)(対数値)	$\log_{10} r_1$	1.60
ローレンツ因子 (最大値)(対数値)	$\log_{10} r_2$	7.54
カットオフローレンツ因子 (対数値)	r_b	5.03

表 4.1: SSC モデルにおける SED 作成のために与えたパラメータ。 T 、 K_e 、 r_1 、 r_2 、 r_b は変動が対数スケールであると考えられるため、パラメータ値を対数スケールで表している。

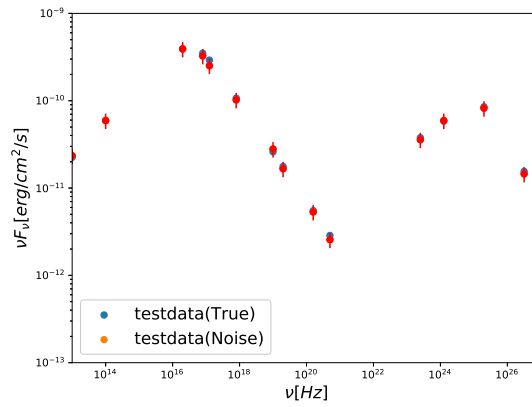


図 4.3: 実験に用いる SED の人工データ。青点が真値、赤点がノイズを加えた後のデータ。

また、尤度関数 $P(y|x)$ は正規分布を設定し、以下のように置く。

$$L = \begin{cases} \prod_{i=1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_d^2}} \exp\left(-\frac{(d_i - f^{syn})^2}{2\sigma_d^2}\right) & (\nu < 10^{21} \text{ Hz}) \\ \prod_{i=1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_d^2}} \exp\left(-\frac{(d_i - f^{SSC})^2}{2\sigma_d^2}\right) & (\nu \geq 10^{21} \text{ Hz}) \end{cases}$$

ここで、 d_i は作成したデータ点、 f^{syn} 、 f^{SSC} は式 (2.5)、式 (2.8) で示したシンクロトロン放射成分、及び逆コンプトン散乱成分のエネルギーフラックスを表す。尤度関数の標準偏差値 σ_d は、SED の人工データを作成する際に用いた正規乱数の標準偏差とする。初期値を真値から 10~20% 離れた値とした。またドップ

ラー因子 δ_D 、タイムスケール T の事前分布を以下のように置いた。

$$P(\delta_D) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\delta_D}^2}} \exp\left(-\frac{(\delta_D - \delta_{Dmean})^2}{2\sigma_{\delta_D}^2}\right) \quad (4.7)$$

$$P(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_T^2}} \exp\left(-\frac{(T - T_{mean})^2}{2\sigma_T^2}\right) \quad (4.8)$$

ここで、 δ_D と T の真値をそれぞれ δ_{Dmean} 、 T_{mean} とし標準偏差をそれぞれ $\sigma_{\delta_D} = 5.0$ 、 $\sigma_T = 1000.0$ とした。また、 $r1$ 、 $r2$ は式の原理的に決まらないので、この2パラメータにも事前分布を置いている。この結果のトレース図を図 4.4 に示す。

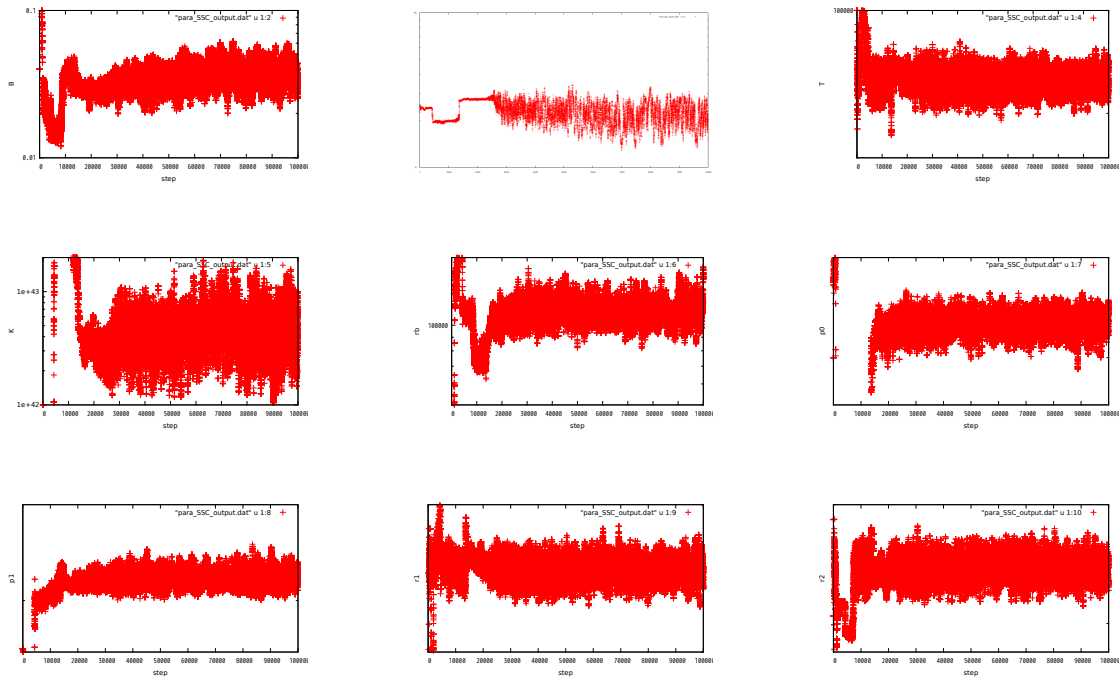
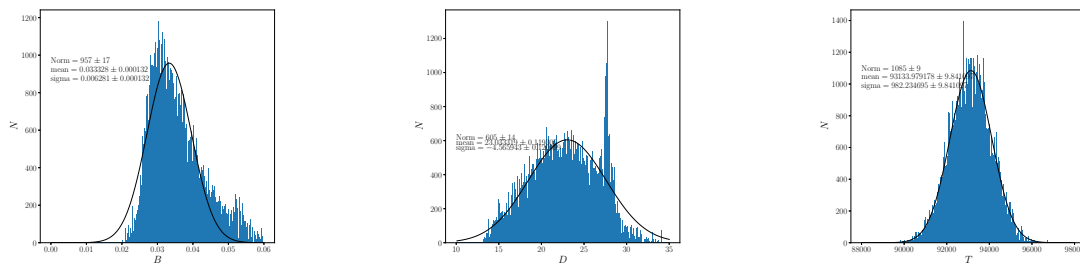


図 4.4: ドップラー因子 δ_D とタイムスケール T に事前分布を置いたときのトレース図。横軸はステップ数、縦軸はパラメータの値である。

図 4.4 から、どのパラメータも真値付近に値が収束していることがわかる。これらのサンプルから得られるそれぞれのパラメータの事後分布を図 4.5 に示す。



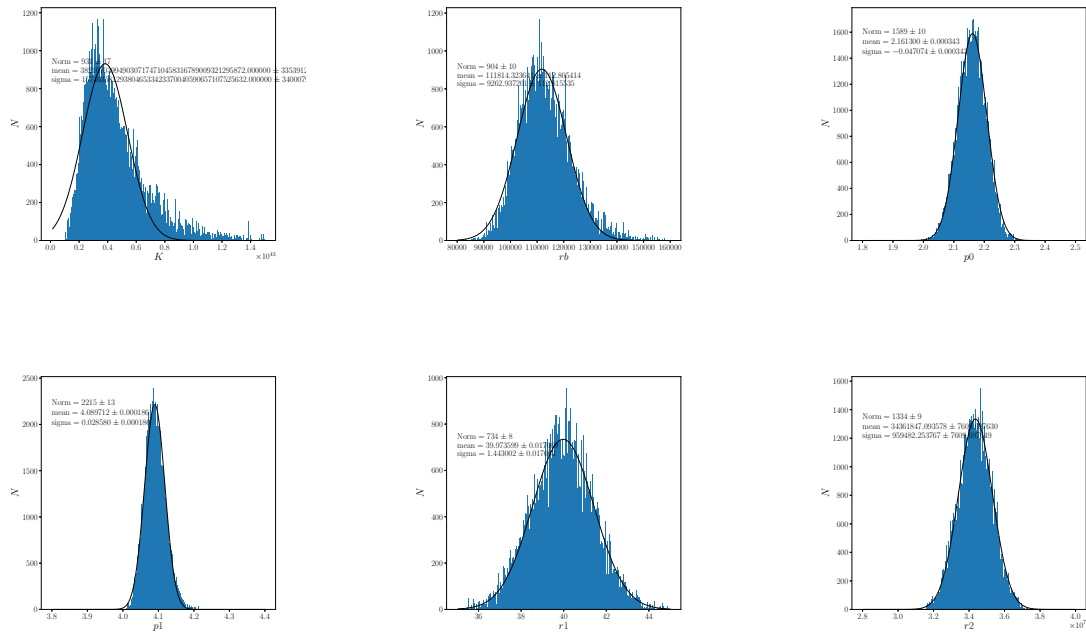


図 4.5: 事後分布。横軸:パラメータ値、縦軸:事後確率。

尚、事後分布に使ったデータは、はじめの2万回を使用していない。これは「Burn-in」という操作であり、初期値に依存するデータを取り除くためである。図より、事後分布のピークが概ねそれぞれの真値に一致している。しかし、パラメータ B に対しては、28 付近にピークが存在している。人工データを元に計算しているのでこれは C++ のスクリプトのバグであると思われる。今後の課題としたい。また、推定した事後分布を正規分布で再フィッティングしているが、これは統計数が十分に多く、きれいにフィットできるときのみ有効であると思われる手法であるので、事後分布が正規分布でフィット出来ない場合には他の真値、誤差の評価法が必要である。詳しくは考察で述べる。今回の推定したパラメータで作成した SED を以下に示す。

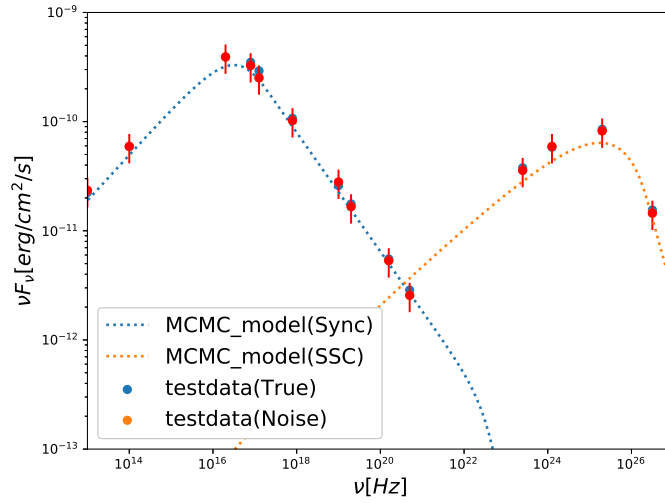


図 4.6: 実験に用いる SED の人工データ。赤点がノイズを加えた後のデータ。点線が MCMC 法で推定したパラメータで作成した SED。

パラメータ δ_D と T に事前分布を設定した場合のそれぞれのパラメータの中央値と真値の値を表 4.2 に示す。

パラメータ	記号	真値	推定値
磁場	B	0.037	0.034 ± 0.006
ドップラー因子	δ_D	22.45	23.03 ± 4.5
タイムスケール (対数値)	$\log_{10} T_{v,min}$	4.97	4.97 ± 0.03
電子スペクトルのノーマリゼーション (対数値)	$\log_{10} K_e$	42.63	38.9 ± 1.5
電子スペクトル因子 (低エネルギー側)	p_0	2.15	2.161 ± 0.05
電子スペクトル因子 (高エネルギー側)	p_1	4.11	4.09 ± 0.03
ローレンツ因子 (最小値)(対数値)	$\log_{10} r_1$	1.60	1.60 ± 0.01
ローレンツ因子 (最大値)(対数値)	$\log_{10} r_2$	7.54	7.535 ± 0.05
カットオフローレンツ因子 (対数値)	$\log_{10} r_b$	5.03	5.04 ± 0.02

表 4.2: SSC モデルにおける SED 作成のために与えたパラメータ。 T 、 K_e 、 r_1 、 r_2 、 r_b は変動が対数スケールであると考えられるため、パラメータ値を対数スケールで表している。

図と表より、 D の 30 付近にピークがある事後分布になっていること以外では、適応的メトロポリス法による MCMC が機能していると考えられる。ここで、誤差の評価についてであるが、事後分布が統計量が多く、きれいな正規分布の形になっている場合はガウシアン 1σ を誤差とし、そうでない場合、例えば今回の例でいう磁場 B 、電子スペクトルのノーマリゼーション K には、カウント数の重み平均をとり、これを

\bar{X} として、各パラメータのデータ点 X_i 、総ステップ数を N として、

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (X_i - \bar{X})^2} \quad (4.9)$$

を誤差として計算している。次節から、この適応的メトロポリス法を EC モデルに適応させ、事後分布を作ることを試みる。

4.3.1 EC モデルに対して、ドップラー因子 δ_D 、タイムスケール T 、ローレンツ因子 r_1 、 r_2 に事前分布を置いた場合の SED パラメータ推定

これから、EC モデルに対して適応的メトロポリス法を適用し、各パラメータが収束するのかどうかを実験する。今回与えたパラメータは Finke+16 [12] を参考に作成したもので有名な FSRQ である 3C454.3 のパラメータであり、第 3 章の表 3.1 の通りである。その中でも変数となるパラメータを抜き出して表 4.3 に示す。表 4.3 に書いていないパラメータは SED からでは決めることが出来ないため固定して扱う。

パラメータ	記号	値
磁場	B	0.56
ドップラー因子	δ_D	40
タイムスケール (対数値)	$\log_{10} T_{v,min}$	4.97
電子スペクトルのノーマリゼーション (対数値)	$\log_{10} K_e$	40.6
電子スペクトル因子 (低エネルギー側)	p_0	2.0
電子スペクトル因子 (高エネルギー側)	p_1	3.5
ローレンツ因子 (最小値) (対数値)	$\log_{10} r_1$	1.3
ローレンツ因子 (最大値) (対数値)	$\log_{10} r_2$	7.7
カットオフローレンツ因子 (対数値)	$\log_{10} r_b$	4.0
Disk の電子スペクトルのノーマリゼーション (対数値)	$\log_{10} K_{Disk}$	42.8
BLR の電子スペクトルのノーマリゼーション (対数値)	$\log_{10} K_{BLR}$	43.7
DT の電子スペクトルのノーマリゼーション (対数値)	$\log_{10} K_{DT}$	44.0

表 4.3: EC モデルにおける SED 作成のために与えたパラメータ。

人工データはこのパラメータを EC モデルの放射式に代入し、SSC 成分、降着円盤による逆コンプトン散乱成分、BLR による逆コンプトン散乱成分、ダストトーラスによる逆コンプトン散乱成分の 4 つの関数を足しあわせたものをまとめて逆コンプトン散乱成分としている。まず、SSC モデルと同様に EC モデルを計算し、いくつかの点を抜き出して y 軸方向に標準偏差 50 の正規乱数を振って作成した。(図 4.7)

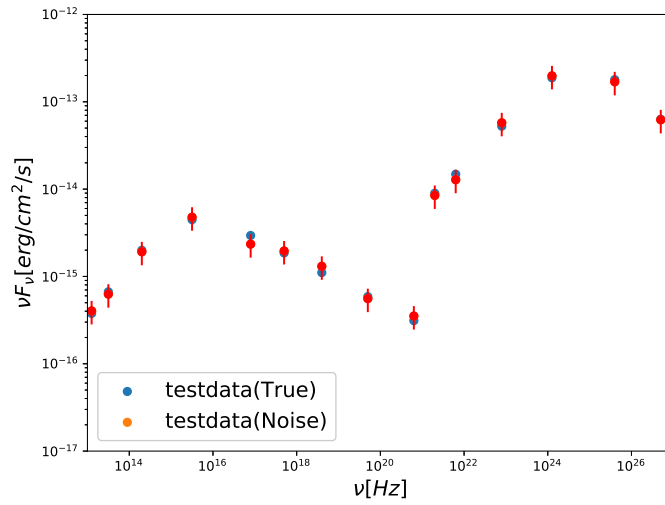
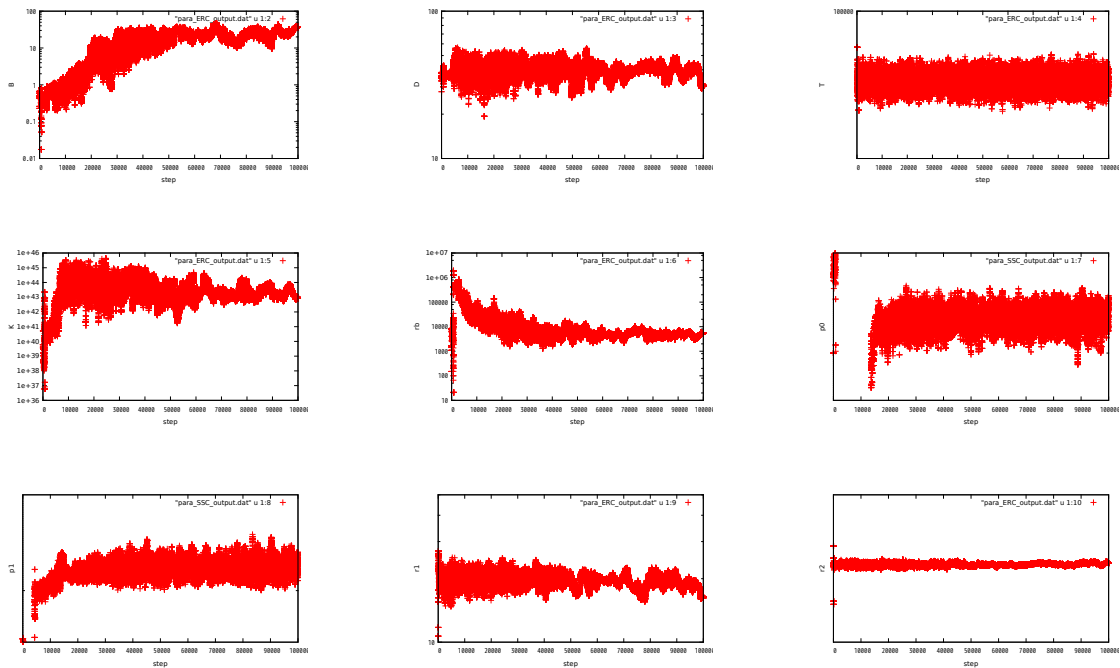


図 4.7: 実験に用いる EC の人工データ。青点が真値、赤点がノイズを加えた後のデータ。

ドップラー因子 δ_D 、タイムスケール T 、ローレンツ因子 r_1, r_2 に対して事前分布を置いて計算し、尤度関数を正規分布とし、以下のように設定する。

$$L = \begin{cases} \prod_{i=1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_d^2}} \exp\left(-\frac{(d_i - f^{syn})^2}{2\sigma_d^2}\right) & (\nu < 10^{21} \text{ Hz}) \\ \prod_{i=1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_d^2}} \exp\left(-\frac{(d_i - f^{ERC_{Total}})^2}{2\sigma_d^2}\right) & (\nu \geq 10^{21} \text{ Hz}) \end{cases}$$

前回と同様に、10万回のステップで計算を行なったところ、図 4.8 の結果が得られた。



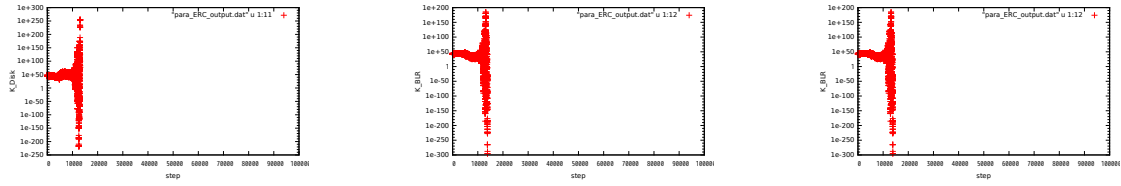


図 4.8: ドップラー因子 δ_D とタイムスケール T に事前分布を置いたときの EC モデルのトレース図。横軸はステップ数、縦軸はパラメータの値である。

図 4.8 から、従来の SSC モデルで用いたパラメータはある程度収束しているものの、EC モデルで追加された K_{Disk} 、 K_{BLR} 、 K_{DT} の値が収束せず、それぞれ ∞ または $-\infty$ に発散していることがわかる。この理由として、逆コンプトン散乱成分は 4 つの関数を足しあわせたものであるため、関数間の相関が強いことが挙げられる。例えば、あるひとつの成分のエネルギーフラックスが他の 3 成分よりも 100 倍大きいならば、作成される SED の逆コンプトン散乱成分はほとんどひとつの放射の寄与によってしまい、他の 3 成分は原理的に決まらないという事が考えられる。このパラメータの縮退の問題は複雑であるので、次節では構造を単純化して考えることにする。

4.3.2 逆コンプトン散乱成分を降着円盤からの放射のみにした場合の SED パラメータ推定

前節で、EC モデルの逆コンプトン散乱成分をすべて足しあげた関数に MCMC 法を用いると、パラメータが収束しないという問題が発生することがわかった。従って本節ではまず、逆コンプトン散乱成分を降着円盤からの放射のみとし、ドップラー因子 δ_D とローレンツ因子 r_1, r_2 に事前分布を置いて計算をすることを考える。ここで、タイムスケール T は、SSC 放射にのみ関係するパラメータであるため、今回は考えない。用いたパラメータと真値と初期値は前節に示した真値を用いている。本解析に使用する人工データを図 4.9 に示す。尚、ノイズ成分はモデル SED に対して 50 % の標準偏差である正規乱数を加えて作成した。

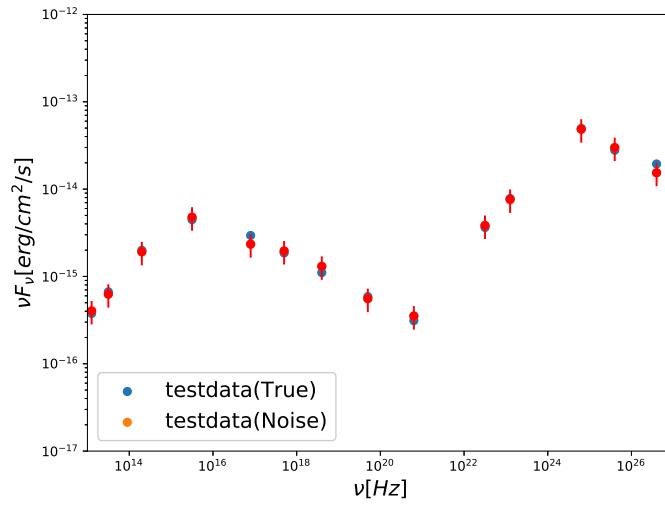
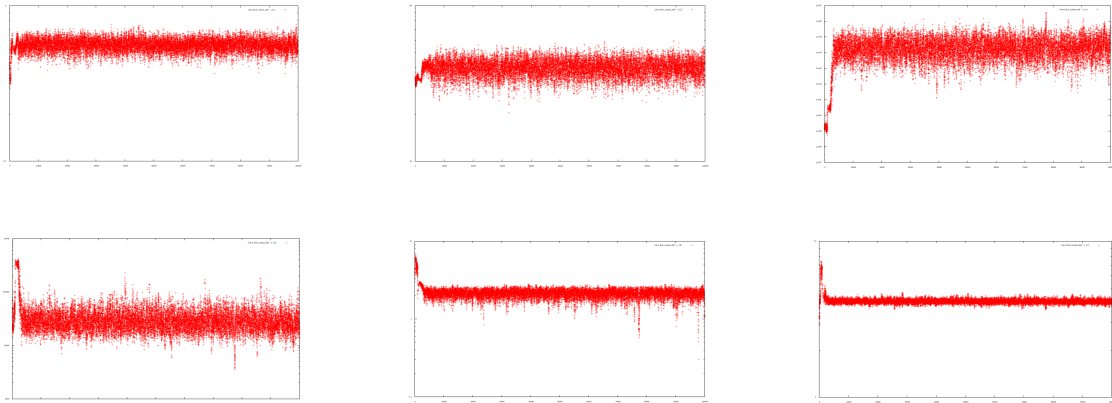


図 4.9: 実験に用いる SED の人工データ。青点が真値、赤点がノイズを加えた後のデータを示す。

また、尤度関数 $P(y|x)$ は正規分布を設定し、以下のように設定した。

$$L = \begin{cases} \prod_{i=1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_d^2}} \exp\left(-\frac{(d_i - f^{syn})^2}{2\sigma_d^2}\right) & (\nu < 10^{21} \text{ Hz}) \\ \prod_{i=1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_d^2}} \exp\left(-\frac{(d_i - f^{ECDisk})^2}{2\sigma_d^2}\right) & (\nu \geq 10^{21} \text{ Hz}) \end{cases}$$

10 万回ステップとして計算を行ったところ、パラメータが収束せず、 p_0 の値が負になってしまい、計算が途中で終わってしまった。従って他のパラメータにも事前分布を置く必要があることがわかった。そこで、様々なパラメータに事前分布を置き、収束するかどうかを確かめた。結果として、 B と K_{Disk} に置くことで解が収束した。そのトレース図を図 4.10 に示す。



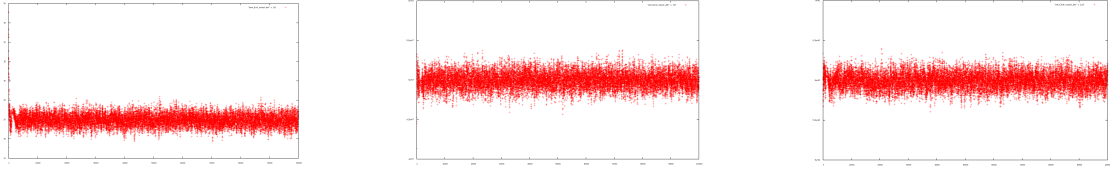


図 4.10: ドップラー因子 δ_D と磁場 B 、 K_{Disk} に事前分布を置いたときの EC モデルのトレース図。横軸はステップ数、縦軸はパラメータの値である。

次に、トレース図から Burn-in の操作を 2 万回まで施した事後分布を図 4.11 に示す。

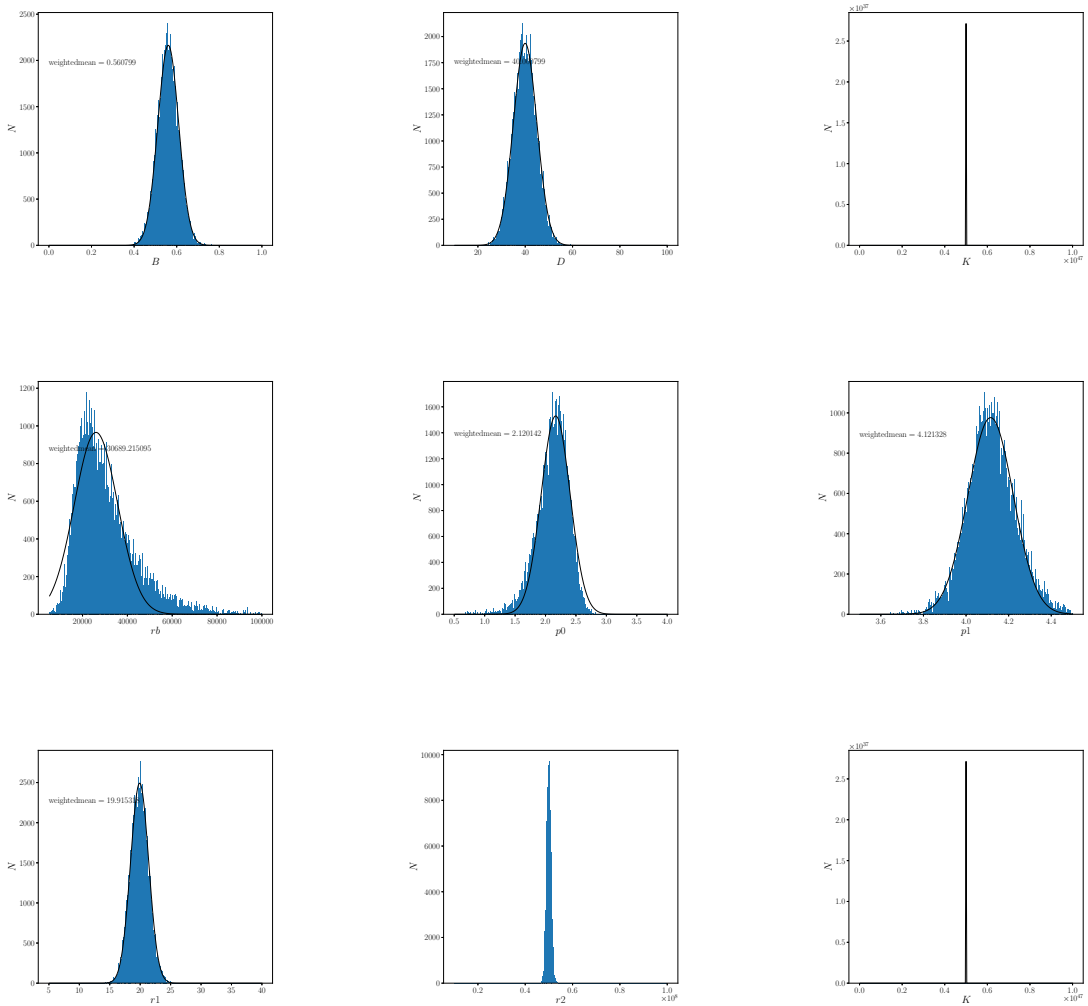


図 4.11: ドップラー因子 δ_D と磁場 B 、 K_{Disk} に事前分布を置いた場合の各パラメータの事後分布。横軸: パラメータ値、縦軸: 事後確率である。

今回の推定したパラメータで作成した EC モデルの SED を図 4.12 に示す。

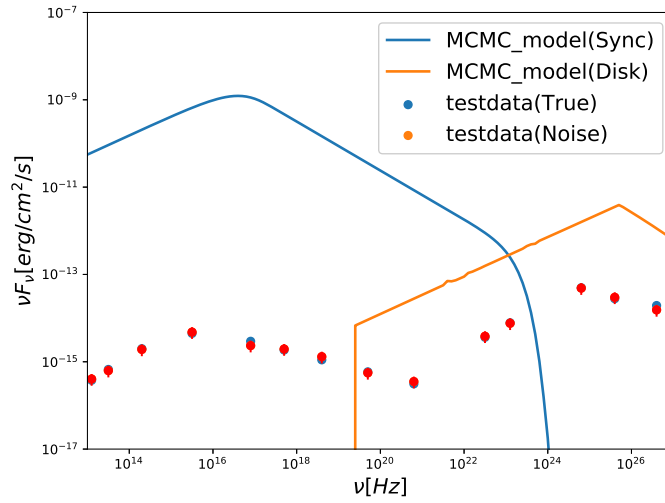


図 4.12: 実験に用いる SED の人工データ。赤点がノイズを加えた後のデータ。点線が MCMC 法で推定したパラメータで作成した SED。

パラメータ δ_D と磁場 B 、 K_{Disk} に事前分布を設定した場合のそれぞれのパラメータの中央値と真値の値を示す。

パラメータ	記号	真値	推定値
磁場	B	0.56	0.56 ± 0.10
ドップラー因子	δ_D	40	40.6 ± 5.4
電子スペクトルのノーマリゼーション (対数値)	$\log_{10} K_e$	40.6	44.0 ± 0.2
電子スペクトル因子 (低エネルギー側)	p_0	2.0	2.1 ± 0.1
電子スペクトル因子 (高エネルギー側)	p_1	3.5	4.2 ± 0.2
ローレンツ因子 (最小値) (対数値)	$\log_{10} r_1$	1.3	1.3 ± 0.05
ローレンツ因子 (最大値) (対数値)	$\log_{10} r_2$	7.7	7.7 ± 0.4
カットオフローレンツ因子 (対数値)	$\log_{10} r_b$	4.0	4.88 ± 0.3
Disk の電子スペクトルのノーマリゼーション (対数値)	$\log_{10} K_{Disk}$	42.8	42.7 ± 0.03

表 4.4: SSC モデルにおける SED 作成のために与えたパラメータ。 T 、 K_e 、 r_1 、 r_2 、 r_b は変動が対数スケールであると考えられるため、パラメータ値を対数スケールで表している。

図より、各パラメータは収束したが、うまく fit できていないことがわかる。SED の形としては概ね一致しているが、ノーマリゼーションの値が局所解にとらわれており、高さが一致していないことがわかる。そこで、さらに電子のノーマリゼーション K に事前分布を置くことを考える。

4.3.3 電子のノーマリゼーション K に事前分布を置いた場合のパラメータ推定

次に、さらに電子のノーマリゼーション K に事前分布を置いて SED の再現を試みる。トレース図は図 4.13 のようになった。

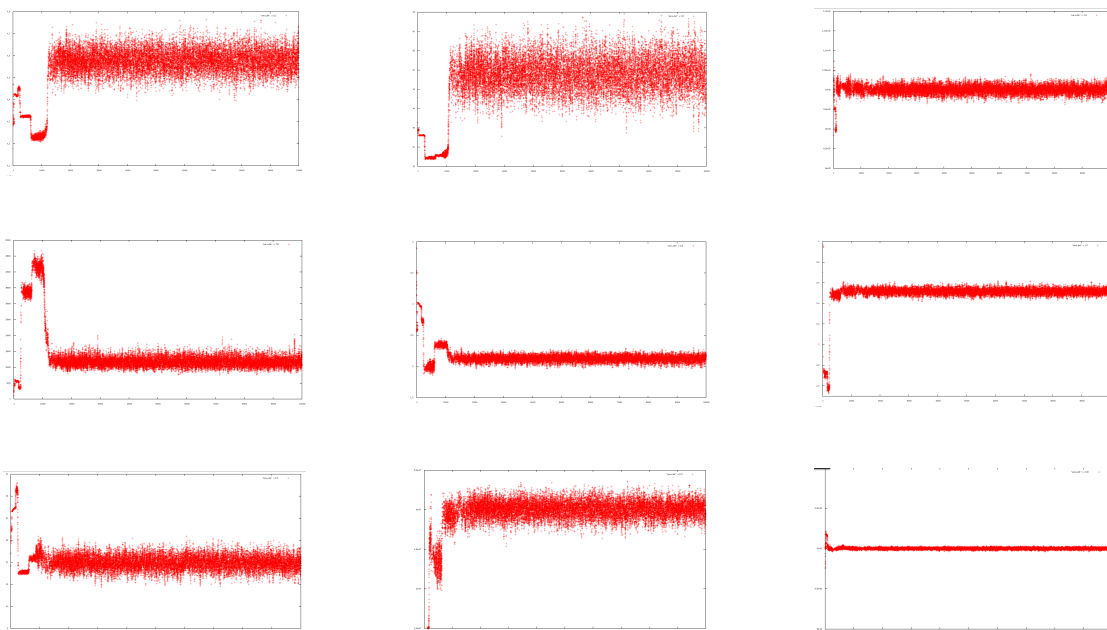
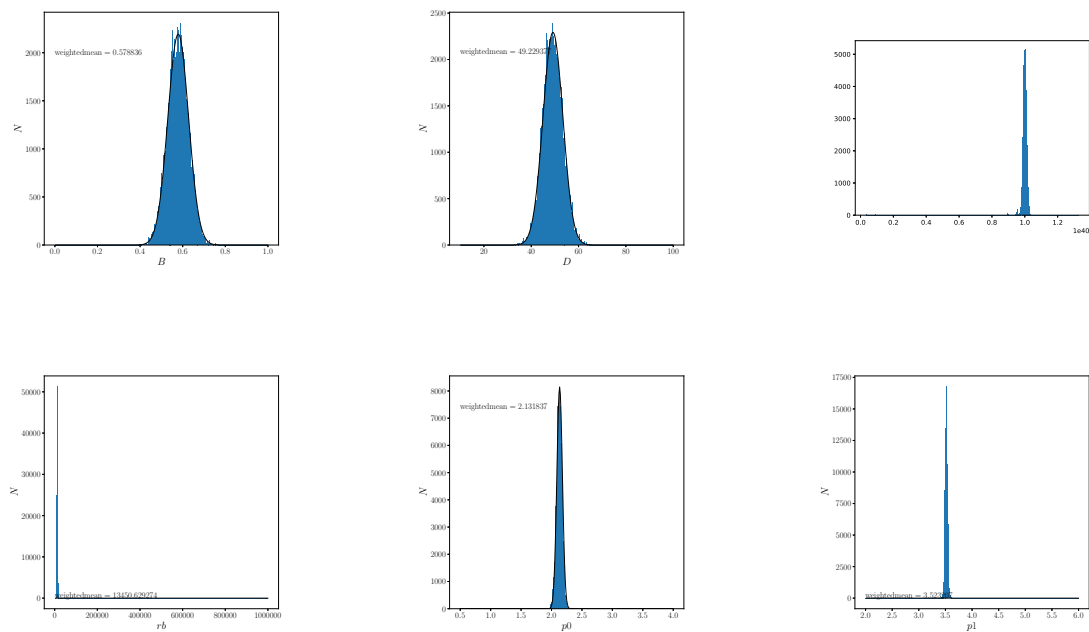


図 4.13: ドップラー因子 δ_D と磁場 B 、 K_{Disk} 、 K に事前分布を置いたときの EC モデルのトレース図。横軸はステップ数、縦軸はパラメータの値である。

次に、トレース図から Burn-in の操作を 2 万回まで施した事後分布を図 4.14 に示す。



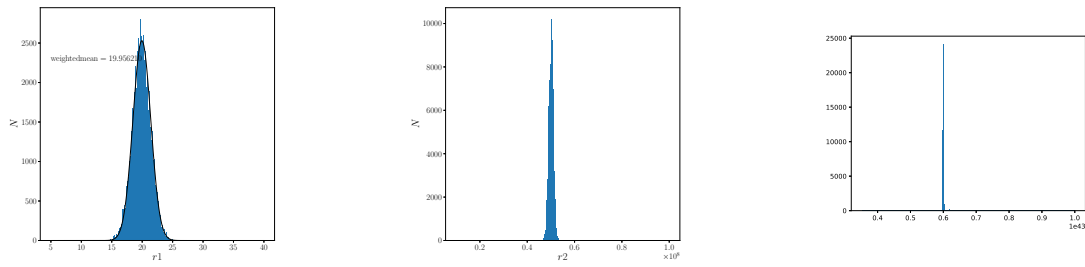


図 4.14: ドップラー因子 δ_D と磁場 B 、 K_{Disk} 、 K に事前分布を置いた場合の各パラメータの事後分布。横軸:パラメータ値、縦軸:事後確率である。

図 4.14 より K に事前分布を置くことで、パラメータがより真値に近くなった。今回の推定したパラメータで作成した EC モデルの SED を図 4.15 に示す。

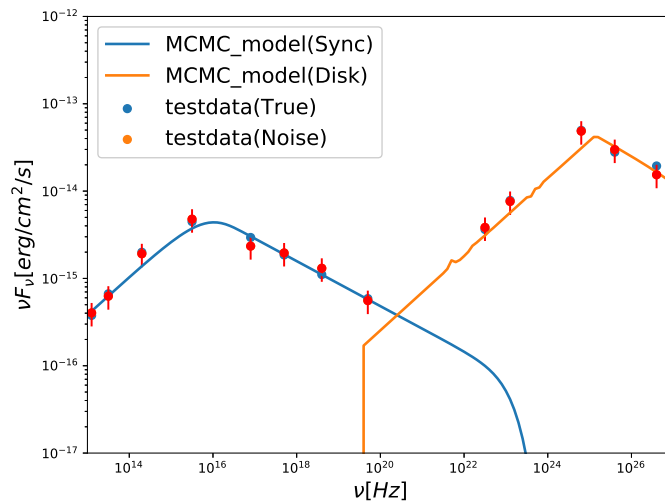


図 4.15: 実験に用いる SED の人工データ。赤点がノイズを加えた後のデータ。点線が MCMC 法で推定したパラメータで作成した SED。

表 4.5 にサンプルパラメータの中央値と誤差を示す。

パラメータ	記号	真値	推定値
磁場	B	0.56	0.57 ± 0.10
ドップラー因子	δ_D	40	48.4 ± 7.4
電子スペクトルのノーマリゼーション (対数値)	$\log_{10} K_e$	40.6	40.0 ± 0.2
電子スペクトル因子 (低エネルギー側)	p_0	2.0	2.1 ± 0.1
電子スペクトル因子 (高エネルギー側)	p_1	3.5	3.5 ± 0.2
ローレンツ因子 (最小値)(対数値)	$\log_{10} r_1$	1.3	1.3 ± 0.05
ローレンツ因子 (最大値)(対数値)	$\log_{10} r_2$	7.7	7.7 ± 0.4
カットオフローレンツ因子 (対数値)	$\log_{10} r_b$	4.0	4.07 ± 0.2
Disk の電子スペクトルのノーマリゼーション (対数値)	$\log_{10} K_{Disk}$	42.8	42.7 ± 0.03

表 4.5: EC モデルにおける SED 作成のために与えたパラメータ。

図 4.15 より、ドップラー因子 δ_D 、磁場 B 、電子のノーマリゼーション K 、降着円盤の逆コンプトン散乱のノーマリゼーション K_{Disk} に事前分布を置くと、サンプルパラメータのモデルがデータをよく表しており、降着円盤からの逆コンプトン散乱成分のみではあるが、不定性を込みで SED を再現することが出来たといえる。

第5章 考察

5.1 精度と積分間隔の関係

MCMC 法では前述の通り、各パラメータを乱数を用いて少しずつ変えながら、計算プログラムを何万回も回すので、計算が複雑な場合、時間がかかる。その時間がかかる主な要因として、積分がある。本研究で用いた放射の理論式には SSC モデル、EC モデル共に多数の積分項があり、これが計算を複雑にさせている。この積分項に対しては、一般的に計算速度が速く長方形積分を用いている。本節では、長方形積分のひとつの短冊の間隔を変えることでどの程度計算速度に差が出るか考察する。もちろん間隔を粗くすればするほど計算速度は速くなるのだが、精度を欠いてしまう。そこで、まず現状一番計算時間のかかる SSC の逆コンプトン散乱成分に対して、長方形の短冊幅を変えて SED を制作した。ここで、SSC モデルの逆コンプトン散乱成分の式は、

$$f_{\epsilon_s}^{SSC} = \frac{9}{16} \frac{(1+z)^2 \sigma_T \epsilon_s'^2}{\pi \delta_D^2 c^2 t_{v,min}^2} \int_0^\infty d\epsilon' \frac{f_{\epsilon'}^{syn}}{\epsilon'^3} \int_{\gamma'_{min}}^{\gamma'_{max}} d\gamma' \frac{N_e'(\gamma')}{\gamma'^2} F_C(q, \Gamma_e) \quad (5.1)$$

である。以上のように 2 重積分を用いており、さらに計算項の中にシンクロトロン放射成分が内挿されているため、計算に時間がかかるのである。実験条件として範囲を $1e+16 \sim 1e+28 [Hz]$ を 120 分割し、積分の短冊幅を変え、計算時間を測る。各計算時間での SED をプロットし、その精度を比較したものが図 5.1 である。

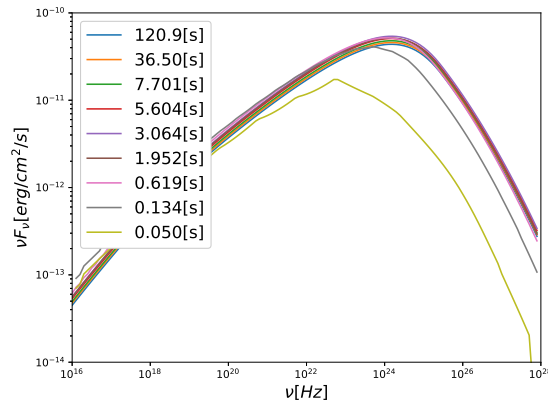


図 5.1: 積分の短冊の幅を変えて SSC 逆コンプトン散乱成分を計算した図。

図 5.1 より、特に計算時間が少ない (0.050[s]) と (0.134[s]), (0.619[s]) は SED の形があまりにも違うため、粗い積分では精度がでないことがわかる。次に他の線について考察する。図 5.2 は図 5.1 を拡大した図で

ある。

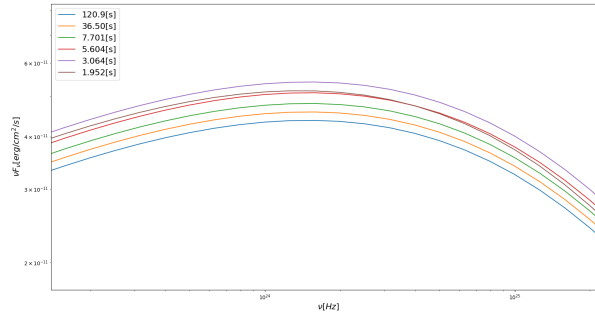


図 5.2: 図 5.1 の拡大図。なお、(0.050[s]) と (0.134[s])、(0.619[s]) の 3 点を省略している。

ここで、一番積分の短冊幅が小さいプロットである (120.9[s]) を一番信頼性の高いグラフ A とし、このグラフと他のグラフの差を、何%ずれているかを議論する。方法としてグラフが極大となる付近の周波数 $10^{23} \sim 10^{25} [Hz]$ のデータ点においてグラフ A 値よりどれだけのズレがあるのかを計算し、表 5.1 に示す。

グラフ	グラフ A とのずれ [%]
36.50[s]	3.9 ± 0.1
7.701[s]	8.8 ± 0.4
5.604[s]	13.2 ± 1.6
3.064[s]	20.1 ± 2.1
1.952[s]	15.2 ± 2.0

表 5.1: グラフ A と各グラフの差

(3.064[s]) のグラフよりも (1.952[s]) のグラフの方がずれが小さい理由として、計算した周波数 [Hz] の範囲を制限していたからであると考えられる。今後計算速度を早くして MCMC を計算するときには、上記の誤差が生じることを考えて SED のモデル fit をする必要があると思われる。EC モデルでも同様のことが議論できるので、今後の課題としたい。

5.2 FSRQ の放射モデルの収束について

FSRQ の放射モデルの逆コンプトン散乱成分は 4 つの独立な関数の足し合わせで表されるので、何も事前分布を置かない場合には原理的に収束することはない。また、今回再現した SED は、逆コンプトン散乱成分を降着円盤のみからとし、ドップラー因子 δ_D 、磁場 B 、ローレンツ因子 r_1, r_2 、電子のノーマリゼーション K 、降着円盤のノーマリゼーション K_{Disk} に事前分布を置くことでパラメータ間の縮退が解けている。ここで、ドップラー因子とローレンツ因子は観測などから事前分布を設定することができるのだが、 B や K 、 K_{disk} は観測から決めることが難しい。従って逆コンプトン散乱成分のノーマリゼーションの縮退を防ぐためにはそれぞれの値の比を固定するなどの方法をとる必要があると思われる。BLR、ダストオーラ

スからの種光子は降着円盤からきた光子を散乱させているのである程度の比を制限することができる。また、降着円盤からの逆コンプトン散乱成分のみの SED だけでなく、今後は BLR、ダストトールスからの逆コンプトン散乱成分のみについての SED の推定も試みる必要がある。

5.3 OpenMP による計算速度高速化について

OpenMP とは Open Multi-Processing の略で、共有メモリ型並列プログラムを作成、実行するための枠組みである。OpenMP を MCMC 法の尤度計算部分に使用することで、尤度計算部分が並列化されコアの数には依存するが計算速度の向上が見込める。現在使用している計算機のスレッドは 24 個あるので、最大 24 スレッドの並列化が可能である。以下に計算に使用したスレッド数と、計算時間を表 5.2 に示す。尚、MCMC は 10 万回回している。

スレッド数	MCMC による計算時間
1	4563[s]
2	4563[s]
4	2520[s]
8	2060[s]
12	1439[s]
16	1340[s]
20	1213[s]
24	1320[s]

表 5.2: OpenMP によって並列化された数と計算時間の対応表

表 5.2 より、OpenMP を用いることで、計算速度がおおよそ 4 倍になった。また、スレッド数が多ければ多いほど計算速度が早くなるわけではなく 12 スレッド以上の並列化をしても計算速度がそこまで早くはならなかった。これは人工データを 14 点しか用意していなかったため、最大で 14 スレッドまでしか並列化ができなかったためと思われる。実際に実データを取り扱う際はさらにデータ数が増えると思われるので、並列化によってさらなる計算速度を出せられると思われる。

第6章 まとめと今後

従来のFSRQの放射の理論式は、パラメータが多く計算に時間がかかりSEDのフィットが困難であった。そこでいくつかのパラメータを固定し、SEDデータにモデルを目で見て合わせることで推定を行うことが多かった。しかし、値を固定する方法では不定性の推論の問題が生じ、推定の客観性を欠いてしまうという現状であった。そこで、Finke+16で記述されているECモデルの理論式に対して様々な近似式を用いて、積分の数を減らす数値計算コードをC++で作成した。そしてその理論式に対してMCMC法を用いてFSRQのSEDの最適なモデルを推定することを試みた。ECモデルのSEDパラメータは12個あり、その中のドップラー因子 δ_D 、タイムスケール T 、ローレンツ因子 r_1, r_2 に対して事前分布を設定したが、降着円盤、BLR、ダストトラスからの逆コンプトン散乱フラックスのノーマリゼーションが縮退しており、パラメータが収束しなかった。そこで逆コンプトン散乱フラックス成分を降着円盤のみからとし、さらに磁場 B と電子のノーマリゼーション K 、降着円盤のノーマリゼーション K_{Disk} に事前分布を置くことでパラメータ間の縮退が解け、モデルの推定が可能となった。しかし、磁場 B やノーマリゼーション K は観測から現状決めることが難しいパラメータであるので今のままでは実データのモデルフィットをすることは困難である。従って今後は人工データでパラメータ間の縮退を解く方法を模索し、モデル推定ができるようにすることが課題である。

謝辞

本研究を進めるにあたり、指導教官である深沢先生には大変お世話になりました。理論式のわからないところを質問しに行くたびに的確なアドバイスをしてくださり、理解が深まりました。感謝しています。植村先生にはMCMCについて、わからないことを丁寧に教えてもらいました。ありがとうございます。また山田さん、戸田さん、宮岡さんには何度も質問させていただきましたが、いつでも丁寧な対応をしてくださり心より感謝しております。さらに研究室のみなさまにはさまざまな場面で研究室生活を支えてもらいました。本当にありがとうございました。

関連図書

- [1] 岡村定矩,2012, シリーズ現代の天文学 別巻 天文学辞典, 日本評論社
- [2] <http://www.icrr.u-tokyo.ac.jp/cta/agn.html>
- [3] Bradley M.Peterson, 和田桂一, 他訳,2010, ピーターソン活動銀河核 -巨大ブラックホールが引き起こす AGN 現象のすべて-
- [4] 井上裕彦,2008, The structure of X-ray emission regions in Seyfert 1 galaxies セイファート 1 型銀河における X 線放射領域の構造, 東京工業大学博士論文
- [5] 山田悠梨香,2016, 活動銀河核ジェットの多波長データを用いたマルコフ連鎖モンテカルロ法による物理量推定 広島大学卒業論文
- [6] Vaidehi.S.Paliya,et.al.2015,arXiv:1501.07363
- [7] Itoh,et.al.2015,PASJ,67,45
- [8] *Böttcher*,et.al.2013,*The Astrophysical Journal*,768,54
- [9] Finke,et.al.2008,*The Astrophysical Journal*,686,181
- [10] Crusius,A.& Schlickeiser,R.1986,*A& A*,164,L16
- [11] Dermer,C.D.,& Menon,G.2009,*High Energy Radiation from Black Holes:GammaRays, Cosmic Rays, and Neutrinos*(Princeton,NJ:Princeton Univ.Press)
- [12] Finke,et.al.2016,EXTERNAL COMPTON SCATTERING IN BLAZAR JETS AND THE LOCATION OF THE GAMMA-RAY EMITTING REGION, *The Astrophysical Journal*,830:94
- [13] Dermer,C.D.,&Schlickeiser,R .1993,*Apj*,416,458
- [14] Georganopoulos,M.,Kirk,J.G.& Mastichiadis,A.2001,*APJ*,686,181
- [15] Dermer,C.D.,Schlickeiser,R,& Mastichiadis,A. 1992, *A& A*,256,L27
- [16] *Böttcher*.M,& Dermer,C.D. 1995, *A& A*, 302,37
- [17] Nenkova,M.,Sirocky,M.M.,Nikutta,R.,Ivezic,Z& Elizur,M.2008b,*ApJ*,685,160
- [18] Sikora,et.al.2009,*ApJ*,779,68
- [19] Jones,F.C.1968,*PhRv*,167.1159

- [20] Blumenthal, G.R., & Gould, R.J. 1970 *RvMP*, 42, 237
- [21] 久保拓弥, 2012, データ解析のための統計モデリング入門: 一般化線形モデル・階層ベイズモデル・MCMC
- [22] Robbins, H., & Monro, S., 1951. A stochastic approximation method. *The Annals of Mathematical Statistics* 22, 400-407
- [23] Ghisellini, G., Guilbert, P.W., & Svensson, R. 1988, *ApJ*, 334, L5
- [24] 適応的マルコフ連鎖モンテカルロ法入門 荒木貴光 科学研究費補助金新学術領域研究「スパースモデリングの深化と高次元データ駆動科学の創成」2016年度チュートリアル 講演会資料